

**SURAT PERJANJIAN PENUGASAN DALAM RANGKA
PELAKSANAAN PROGRAM PENELITIAN PRODUK TERAPAN DANA APB UMSU (INTERNAL)
TAHUN ANGGARAN 2016
Nomor : 64 /II.3-AU/UMSU-LP2M/C/2017**

Pada hari ini senin tanggal sembilan bulan januari tahun dua ribu tujuh belas, kami yang bertanda tangan dibawah ini :

1. **Dr. Muhammad Said Siregar** : Ketua Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara (UMSU) yang berkedudukan di Medan, berdasarkan Keputusan Rektor UMSU Nomor 850/KEP/II.3-AU/UMSU/D/2016 tanggal 1 April 2016, dalam hal ini bertindak untuk dan atas nama Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara (UMSU) untuk selanjutnya disebut sebagai **PIHAK PERTAMA**;
2. **Dra. Ellis Mardiana Pangabea, M.Pd** : Sebagai Staf Pengajar di Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara yang berkedudukan di Medan, dalam hal ini bertindak sebagai Ketua Pelaksana yang bertanggungjawab dalam Program Penelitian Produk Terapan Dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016 dengan judul: **"Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Yang Baik Pada Pembelajaran Matematika"**; untuk selanjutnya disebut **PIHAK KEDUA**.

Perjanjian penugasan ini berdasarkan kepada :

1. Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003, Tentang Sistem Pendidikan Nasional
2. Anggaran Dasar dan Anggaran Rumah Tangga Muhammadiyah
3. Qaidah Perguruan Tinggi Muhammadiyah
4. Statuta Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
5. SK Rektor UMSU Nomor 850/KEP/II.3-AU/UMSU/D/2016 tanggal 1 April 2016 tentang Pengelola Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat
6. SK Rektor UMSU Nomor 3837/KEP/II.3-AU/UMSU/F/2016 tanggal 15 Desember 2016 tentang Penetapan Proposal Penelitian dan Pengabdian internal Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara Tahun 2016

PIHAK PERTAMA dan **PIHAK KEDUA** secara bersama-sama bersepakat mengikatkan diri dalam suatu perjanjian pelaksanaan Program Penelitian Produk Terapan dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016 dengan ketentuan dan syarat-syarat yang diatur dalam pasal-pasal berikut :

PASAL 1

1. **PIHAK PERTAMA** memberi tugas kepada **PIHAK KEDUA**, dan **PIHAK KEDUA** menerima tugas tersebut untuk melaksanakan dan sebagai penanggung jawab Program Penelitian Produk Terapan Dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016 dengan judul penelitian: **"Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Yang Baik Pada Pembelajaran Matematika"**

2. **PIHAK KEDUA** bertanggung jawab penuh atas pelaksanaan, administrasi dan keuangan pekerjaan sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dan berkewajiban menyimpan semua bukti-bukti pengeluaran serta dokumen pelaksanaan lainnya serta menyampaikan laporan hasil penelitian kepada **PIHAK PERTAMA**.
3. Dana Pelaksanaan Penugasan Penelitian Produk Terapan sebagaimana dimaksud pada Ayat (1) sebanyak **1 (Satu) Judul** Dibebankan kepada Anggaran Pendapatan dan Belanja (APB) UMSU sebesar **Rp. 20.000.000,- (Dua Puluh Juta Rupiah)**.

PASAL 2

1. **PIHAK PERTAMA** menyelenggarakan proses administrasi pencairan dana sebagaimana dimaksud Pasal 1 ayat (3).
2. Dana pelaksanaan penugasan sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dibayarkan oleh **PIHAK PERTAMA** kepada **PIHAK KEDUA** secara bertahap melalui Biro Administrasi Keuangan (BAK) UMSU, dengan ketentuan sebagai berikut:
 - a. Pembayaran tahap pertama sebesar 70% dari total bantuan dana kegiatan yaitu 70% X Rp. 20.000.000,- = **Rp 14.000.000,- (empat belas juta rupiah)**
 - b. Pembayaran tahap kedua/terakhir sebesar 30 % dari total bantuan dana kegiatan yaitu 30% X Rp. 20.000.000 = **Rp. 6.000.000,- (enam juta rupiah)**, dibayarkan setelah **PIHAK KEDUA** menyampaikan hard copy (3 rangkap) dan soft copy (CD) dalam format pdf kepada **PIHAK PERTAMA** selambat-lambatnya tanggal **15 April 2017** dokumen-dokumen sebagai berikut :
 1. Laporan Kemajuan Pelaksanaan Penelitian 70 %
 2. Rekapitulasi laporan Penggunaan Keuangan 70 % yang telah dilaksanakan
 3. Berita Acara Serah Terima Laporan Kemajuan Pelaksanaan
 4. Berita Acara Serah Terima Laporan Penggunaan Dana Keuangan 70 %
 - c. **PIHAK KEDUA** bertanggung jawab mutlak dalam pembelanjaan dana tersebut pada ayat (2) sesuai dengan proposal kegiatan yang telah disetujui dan berkewajiban untuk menyimpan semua bukti-bukti pengeluaran dana sesuai jumlah dana yang diberikan.
 - d. **PIHAK KEDUA** berkewajiban mengembalikan sisa dana yang tidak dibelanjakan ke kas UMSU.

PASAL 3

PIHAK PERTAMA tidak bertanggung jawab atas keterlambatan dan/atau tidak terbayarnya sejumlah dana yang disebabkan karena kesalahan **PIHAK KEDUA** dalam menyampaikan dokumen-dokumen sebagaimana dimaksud dalam pasal 2 ayat (2) point b.

PASAL 4

1. **PIHAK KEDUA** harus menyampaikan surat pernyataan telah menyelesaikan seluruh pekerjaan yang dibuktikan dengan Berita Acara Penyelesaian Pekerjaan (BAPP) kepada **PIHAK PERTAMA** dan menyerahkan hard copy laporan hasil penelitian dan rekapitulasi laporan keuangan 100% dan Draft Artikel Ilmiah sebanyak 5 (lima) rangkap dan soft copy (CD) selambat-lambatnya **17 Juni 2017**
2. Apabila sampai dengan batas waktu masa pelaksanaan pekerjaan ini **PIHAK KEDUA** belum menyerahkan Berita Acara Penyelesaian Pekerjaan (BAPP) hasil pekerjaan seluruhnya kepada **PIHAK PERTAMA**, maka **PIHAK KEDUA** dikenakan sanksi berupa :
 - a. Peringatan tertulis dari Pusat penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat UMSU dan/atau
 - b. Pengurangan dan/atau penghentian dana hibah penugasan pelaksanaan penelitian pada tahun berikutnya.
3. Tidak mengikutsertakan pada kompetisi Penelitian berikutnya.
4. Laporan hasil penelitian Produk Terapan sebagaimana tersebut pada ayat (1) harus memenuhi ketentuan sebagai berikut :
 1. Bentuk/ukuran kertas A4

2. Warna cover (d disesuaikan dengan ketentuan yang ditetapkan)
 - a. Penelitian Produk Terapan (PDP) = Warna Merah Muda (Pink)
 - b. Penelitian Produk Terapan (PF) = Warna Coklat
 - c. Penelitian Produk Terapan (PPT) = Warna Orange
 - d. Iptek Bagi Masyarakat (IbM) = Warna Hijau Tua
 - e. Iptek Bagi Kewirausahaan (IbK) = Warna Hijau Muda
 - f. Iptek Bagi Pengembangan Muhammadiyah (IbPM) = Warna Biru Muda
 - g. Iptek Bagi Desa Mitra (IbDM) = Warna Biru Tua
3. Dibagian bawah cover ditulis :

Dibiayai Oleh :

APB Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
Sesuai Dengan Surat Perjanjian Penugasan Dalam Rangka Pelaksanaan Program
Penelitian Produk Terapan Dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016
Nomor : 64 /II.3-AU/UMSU-LP2M/C/2017

PASAL 5

Perubahan-perubahan terhadap susunan tim pelaksana dan substansi pelaksanaan penelitian dapat dibenarkan apabila telah mendapat persetujuan tertulis dari **PIHAK PERTAMA**

PASAL 6

1. **PIHAK KEDUA** berkewajiban untuk menindak lanjuti dan mengupayakan hasil penelitian yang dilakukan dosen untuk memperoleh HKI dan/atau publikasi ilmiah untuk setiap judul Program Penelitian Produk Terapan sebagaimana dimaksud pasal 1 ayat (1) selambat-lambatnya **31 Agustus 2017**
2. Perolehan sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dimanfaatkan sebesar-besarnya untuk pelaksanaan Tri Dharma Perguruan Tinggi.
3. **PIHAK KEDUA** berkewajiban untuk melaporkan perkembangan perolehan HKI dan/atau publikasi ilmiah seperti yang dimaksud pada ayat (1) secara berkala kepada **PIHAK PERTAMA** pada setiap akhir tahun anggaran berjalan.
4. **PIHAK KEDUA** wajib mengikuti seminar hasil untuk mempublikasikan hasil penelitian atau pengabdian masyarakat internal UMSU selambat-lambatnya **10 Juni 2017**

PASAL 7

1. Apabila **PIHAK KEDUA** berhenti dari jabatan sebelum pelaksanaan perjanjian ini selesai, maka **PIHAK KEDUA** wajib menyerahkan tanggung jawabnya kepada pejabat baru yang menggantikannya
2. Apabila setiap ketua pelaksana sebagaimana dimaksud dalam pasal 1 tidak dapat menyelesaikan pelaksanaan penelitian ini, maka **PIHAK KEDUA** wajib menunjuk pengganti ketua pelaksana yang merupakan salah satu anggota tim setelah mendapat persetujuan tertulis dari LP2M UMSU.
3. Apabila **PIHAK KEDUA** tidak dapat melaksanakan tugas sebagaimana dimaksud dalam pasal 1, maka harus mengembalikan dana yang telah diterima ke kas UMSU serta menyerahkan fotocopy bukti pengembalian ke kas UMSU kepada **PIHAK PERTAMA**
4. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa judul program penelitian sebagaimana dimaksud dalam pasal 1 dijumpai adanya indikasi duplikasi dengan penelitian lain dan/atau ditemukan indikasi ketidak jujuran, i'tikad kurang baik yang tidak sesuai dengan kaidah ilmiah, maka kegiatan penelitian tersebut dinyatakan **BATAL** dan **PIHAK KEDUA** wajib melaporkan ke **PIHAK PERTAMA** dan mengembalikan seluruh dana penelitian yang telah diterima ke kas UMSU serta menyerahkan fotocopy bukti pengembalian kepada **PIHAK PERTAMA**

PASAL 8

1. Hak kekayaan Intelektual yang dihasilkan dari pelaksanaan program penelitian tersebut diatur dan dikelola sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku
2. Hasil penelitian berupa peralatan dan/atau alat yang dibeli dari kegiatan ini adalah milik Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara yang dapat dihibahkan kepada institusi/lembaga/masyarakat melalui surat keterangan hibah

PASAL 9

1. Apabila terjadi perselisihan antara pihak **PIHAK PERTAMA** dan **PIHAK KEDUA** dalam pelaksanaan perjanjian ini akan dilakukan penyelesaian secara musyawarah dan mufakat dan apabila tidak tercapai penyelesaian secara musyawarah dan mufakat maka penyelesaian dilakukan melalui proses hukum yang berlaku dengan memilih domisili hukum pengadilan negeri Medan
2. Hal-hal yang belum diatur dalam perjanjian ini akan diatur kemudian oleh kedua belah pihak

PASAL 10

Surat Perjanjian pelaksanaan penugasan program penelitian Produk Terapan ini dibuat rangkap 2 (dua) bermaterai cukup sesuai dengan ketentuan yang berlaku, dan biaya materai dibebankan kepada **PIHAK KEDUA**.

PIHAK PERTAMA



Dr. Muhammad Said Siregar, M.Si

PIHAK KEDUA

Dra. Ellis Mardiana Pangabean, M.Pd



DIKETAHUI,
WAKIL REKTOR I

Dr. Muhammad Arifin Gultom, SH., M.Hum

Kode>Nama Rumpun Ilmu : 772 / Pendidikan Matematika

LAPORAN AKHIR PENELITIAN TERAPAN



**MENGINTEGRASIKAN NILAI-NILAI KARAKTER YANG BAIK
PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA**

TIM PENELITIAN

Dra. Ellis Mardiana Panggabean, M.Pd	0002016702 (Ketua)
Dra. Mariani Nasution, M.Pd	0027125308 (Anggota)
Nur' Afifah, S.Pd, M.Pd.	0128038502(Anggota)

Dibiayai Oleh :

**APB Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
Sesuai Dengan Surat Perjanjian Penugasan Dalam Rangka Pelaksanaan Program
Penelitian Terapan Dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016
Nomor : 64/II.3-AU/UMSU-LP2M/C/2017**

**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SUMATERA UTARA
NOVEMBER 2017**

**LEMBAR PENGESAHAN
PENELITIAN PRODUK TERAPAN**

Judul Penelitian

: Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter
Yang Baik Pada Pembelajaran
Matematika

**Kode>Nama Rumpun Ilmu
Ketua Peneliti:**

: 772/Pendidikan Matematika

- a. Nama
b. NIDN
c. Jabatan Fungsional
d. Program Studi
e. Nomor HP
g. Alamat surel

Dra. Ellis Mardiana Panggabean, M.Pd
0002016702
Lektor Kepala
Pendidikan Matematika
081265358378
panggabean.ellys@yahoo.co.id

Anggota Peneliti (1)

- a. Nama Lengkap
b. NIDN
c. Perguruan Tinggi

Dra. Mariani Nasution, M.Pd
0027125308
Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara

Anggota Peneliti (2)

- a. Nama Lengkap
b. NIDN
c. Perguruan Tinggi
Lama Penelitian Keseluruhan
Biaya Penelitian Keseluruhan
Penelitian Tahun ke-

Nur Afifah, S.Pd, M.Pd
0128038502
Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
2 tahun
Rp. 20.000.000,00

- diusulkan ke DRPM
- dana internal PT
- dana institusi lain

Rp. 20.000.000,00
Rp. 0,00 (tuliskan)



only

Marianto Nasution, S.Pd., M.Pd.
NIP. 197011272005011001

Medan, 15 Oktober 2016
Ketua Peneliti

Ellis *18*

Dra. Ellis Mardiana, M.Pd
NIP. 196701021991032001

Menyetujui Ketua LP/LPPM

Muhammad Said Siregar
Dr. Muhammad Said Siregar, M.Si.
NIP. 197011272005011001

RINGKASAN

Pembentukan karakter yang baik dan berkualitas perlu dilakukan secara sistematis dan berkesinambungan mulai dari taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi. Penekanan pada pembangunan karakter dalam tujuan pendidikan matematika yaitu "memberi tekanan pada nalar, dasar, dan pembentukan karakter peserta didik serta juga memberi tekanan pada ketrampilan dalam penerapan matematika". Tujuan umum dari penelitian ini mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik pada pembelajaran matematika yaitu Geometri Analitik Bidang Datar. Temuan penelitian ini adalah perangkat pembelajaran Geometri Analitik Bidang dimana nilai-nilai karakter terintegrasi di dalamnya. Perangkat yang dimaksud adalah Rencana Pembelajaran Semester (RPS), bahan ajar Geometri Analitik Bidang serta lembar kerja mahasiswa. Model pengembangan yang akan digunakan mengacu pada model 4-D yang terdiri dari empat tahap. Keempat tahap tersebut adalah define, design, develop dan disseminate.

Kata Kunci: Integrasi, nilai-nilai karakter, pembelajaran matematika

PRAKATA

Mengingat bahwa pendidikan karakter merupakan sebuah pekerjaan yang sangat mungkin dilaksanakan maka sebagai lembaga yang mencetak tenaga-tenaga kependidikan, program pendidikan matematika FKIP UMSU perlu mempersiapkan guru-guru matematika abad ke 21 yang tidak hanya siap menyelesaikan kurikulum (aspek kognitif), tetapi juga mempunyai karakter yang baik. Sehingga nantinya, mampu membentuk karakter generasi penerus yang dapat menghadapi tantangan masa depan yang serba cepat, terus berubah dan dinamis.

Tujuan penelitian ini adalah menemukan bahan ajar Geometri Analitik Bidang Datar berkualitas yang diharapkan dapat dipakai oleh mahasiswa keguruan dan ilmu pendidikan program studi pendidikan matematika dalam memahami konsep-konsep matematika yang cukup abstrak. Diharapkan, tidak hanya oleh mahasiswa tetapi juga dosen yang mengampu mata kuliah tersebut.

Terimakasih diucapkan kepada pihak Rektorat Universitas yang telah mendanai penelitian ini lewat Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat. Juga pihak-pihak terkait lainnya yang telah memberikan kontribusi dalam pelaksanaan penelitian ini. Semoga penelitian ini bermanfaat terhadap pengembangan ilmu dan pengetahuan pendidikan matematika tidak hanya di internal UMSU tetapi di bidang pendidikan umumnya.

Medan, 24 Mei 2017
Ketua Tim Peneliti

Dra. Ellis Mardiana Panggabean, M.Pd

DAFTAR ISI

Halaman Sampul	i
Halaman Pengesahan	ii
Ringkasan	iv
Prakata	v
Daftar Isi	vi
Daftar Tabel	viii
Daftar Gambar	ix
Daftar Lampiran	x
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1. Pendidikan Karakter Dalam Pembelajaran Matematika	4
2.2. Matematika	7
2.3. Pengembangan Bahan Ajar	9
2.4. Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Pada Pembelajaran	11
2.5. Kerangka Berfikir	13
BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN	15
3.1. Tujuan Penelitian	15
3.2. Manfaat Penelitian	16
BAB 4. METODE PENELITIAN	17
4.1. Lokasi Penelitian	17
4.2. Prosedur Penelitian	17
4.3. Teknik Pengumpulan Data	20
4.4. Teknik Analisis Data	21
4.5. Indikator Pencapaian	21
BAB 5. HASIL DAN LUARAN YANG DICAPAI	22
5.1. Hasil	22
5.2. Luaran Yang Dicapai	35
BAB 6. RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA	36

BAB 7. KESIMPULAN DAN SARAN	37
DAFTAR PUSTAKA	38
LAMPIRAN	

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1.	Jenis Luaran	16
Tabel 5.1.	Capaian Mata Kuliah dan Indikator Geometri Analitik Bidang	32

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Kerangka Pemikiran	14
Gambar 4.1. Bagan Aliran Penelitian Model 4-D Dimodifikasi	19
Gambar 4.2. Bagan Aliran Penelitian Sesuai dengan Fishbone Diagram	20
Gambar 5.1. Peta Konsep Sistem Koordinat	25
Gambar 5.2. Peta Konsep Vektor Pada Bidang	26
Gambar 5.1. Peta Konsep Garis Lurus	26
Gambar 5.1. Peta Konsep Lingkaran	27
Gambar 5.1. Peta Konsep Parabola	28
Gambar 5.1. Peta Konsep Ellips	29
Gambar 5.1. Peta Konsep Hiperbola	30
Gambar 5.1. Peta Konsep Persamaan Berderajat Dua	31

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	SAP
Lampiran 2	Bahan Ajar
Lampiran 3	Laporan Keuangan

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Kekerasan dalam lingkungan pendidikan yang ditandai kekerasan terhadap murid oleh guru, kekerasan terhadap guru oleh murid dan atau orangtua murid, serta "kriminalisasi" terhadap guru tampak marak belakangan ini. Berdasarkan data Komisi Perlindungan Anak Indonesia per April 2015, dari 6.006 kasus kekerasan anak di Indonesia, 1.764 kasus terkait pendidikan (Kompas, Rabu 28 September 2016).

Kasus-kasus lainnya yang ditengarai terjadi di tengah-tengah masyarakat adalah penggunaan narkoba, alkohol dan seks bebas pada remaja. Membudayanya ketidakjujuran yang diperlihatkan oleh pemangku jabatan dan adanya rasa saling curiga dan kebencian di antara sesama. Peristiwa ini menunjukkan bahwa masyarakat ternyata mampu melakukan tindak kekerasan dan tindakan yang tidak terpuji yang mungkin sebelumnya belum pernah terbayangkan.

Untuk itu perlu pembinaan kepribadian yang baik bagi masyarakat khususnya peserta didik. Pembentukan karakter yang baik dan berkualitas perlu dilakukan secara sistematis dan berkesinambungan mulai dari taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi. Untuk itu, pembentukan karakter harus menjadi bagian terpadu dari pendidikan. Sebagaimana yang dinyatakan oleh Firdaus Syam bahwa "Pembangunan karakter ingin mengembalikan paradigma berfikir. Agar mahasiswa tidak hanya pintar, berpengetahuan dan unggul, tetapi juga bertanggung jawab dan beretika. Tantangan ini harus mampu dijawab oleh pihak kampus manapun" (Republika, 20 Maret 2015).

Penekanan pada pembangunan karakter dalam pendidikan juga jelas dinyatakan dalam deskripsi Kerangka Kurikulum Nasional Indonesia (KKNI) bahwa "Sesuai dengan ideologi Negara dan budaya Bangsa Indonesia, maka implementasi sistem pendidikan nasional yang dilakukan di Indonesia pada setiap level kualifikasi mencakup proses yang menumbuhkembangkan afeksi antara lain memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik dalam menyelesaikan tugasnya, mampu bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial dan kepedulian yang tinggi terhadap masyarakat dan lingkungannya, menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, kepercayaan, dan agama serta pendapat/temuan

orisinal orang lain, dst. " Demikian halnya di dalam tujuan pendidikan matematika yaitu "memberi tekanan pada nalar, dasar, dan pembentukan karakter siswa serta juga memberi tekanan pada ketrampilan dalam penerapan matematika".

Pentingnya menanamkan karakter kepada peserta didik juga dinyatakan oleh budayawan Frans Magnis Suseno (dalam Muslich, 2014) bahwa "Untuk membangun karakter peserta didik, mesti didukung dengan inisiatif kritis dan memberikan waktu pada mereka yang mengemukakan ide-ide baru". Senada dengan itu, Lickona (2014) menyatakan "Peranan sekolah sebagai tempat pendidikan moral menjadi semakin penting ketika jutaan anak-anak hanya mendapatkan sedikit pendidikan moral dari orangtua mereka dan ketika makna nilai yang sangat berpengaruh yang didapatkan melalui tempat ibadah lainnya perlahan tidak berarti dan menghilang dari kehidupan mereka". Pada masa ini, ketika sekolah tidak memberikan pendidikan moral, pengaruh kekerasan terhadap karakter anak-anak begitu cepat masuk dan membuat nilai-nilai yang berlaku menjadi vakum". Dalam bagian lain dinyatakannya bahwa " pendidikan nilai merupakan sebuah pekerjaan yang sangat mungkin dilaksanakan".

Pendidikan karakter harus dilakukan secara terus menerus. Sebagaimana yang dikemukakan oleh Aristoteles bahwa karakter itu erat kaitannya dengan habit atau kebiasaan yang terus menerus dilakukan. Jika ini dilakukan maka akan terbentuk individu-individu yang berkarakter yaitu seseorang yang merespon situasi secara bermoral, memanifestasikannya dalam situasi nyata melalui tingkah laku yang baik, jujur, bertanggung jawab, menghormati orang lain dan karakter mulia lainnya.

Temuan Berkoutz (dalam Muslich, 2014: 29) menunjukkan peningkatan motivasi siswa sekolah dalam meraih prestasi akademik pada sekolah-sekolah yang menerapkan pendidikan karakter. Temuan ini didukung oleh, Salafudin (2013) yang menemukan bahwa (1) pendidikan karakter melalui pembelajaran matematika cukup efektif, baik untuk meningkatkan prestasi belajar maupun untuk menanamkan nilai-nilai karakter pada siswa dan (2) Prestasi belajar peserta didik yang menjalani pembelajaran dengan pendidikan karakter melalui pembelajaran matematika lebih baik dari pada hasil belajar peserta didik dengan pembelajaran konvensional (metode ekspositori).

Mengingat Perguruan Tinggi memiliki pilihan dalam mengajarkan pembentukan karakter yaitu dapat mengintegrasikannya secara alami dengan kurikulum standar atau mengajarkan beriringan dengan kurikulum standar. Daripada menambahkan serangkaian pertemuan terpisah pada kurikulum yang sesungguhnya sudah padat, pilihan yang mudah adalah mengintegrasikan pendidikan karakter dengan mata pelajaran/mata kuliah pada semua kelas oleh semua pendidik (Stiff-William dalam Asyanti, 2012)

Nilai-nilai yang dikembangkan dalam pendidikan karakter bangsa diidentifikasi berdasarkan sumber agama, Pancasila, budaya dan tujuan pendidikan nasional. Nilai-nilai itu adalah religius, jujur, toleransi, disiplin, kerja keras, kreatif, mandiri, demokratis, rasa ingin tahu, semangat kebangsaan, cinta tanah air, menghargai prestasi, bersahabat/komunikatif, cinta damai, gemar membaca, peduli sosial, peduli lingkungan dan tanggung jawab.

Sebagai lembaga yang mencetak tenaga-tenaga kependidikan, program pendidikan matematika FKIP UMSU perlu mempersiapkan guru-guru matematika abad ke 21 yang tidak hanya siap menyelesaikan kurikulum (aspek kognitif), tetapi juga yang berkarakter. Sehingga nantinya, mampu membentuk karakter generasi penerus yang dapat menghadapi tantangan masa depan yang serba cepat, terus berubah dan dinamis.

Dari nilai-nilai yang dikembangkan di atas, terdapat sepuluh karakter yang dituntut untuk dikembangkan pada pembelajaran. Sepuluh karakter tersebut adalah kedisiplinan, penampilan, kesantunan, kemampuan bekerjasama, kemampuan berkomunikasi, komitmen, keteladanan, semangat, empati dan tanggung jawab.

Dengan demikian, penelitian ini pada tahun kedua akan mengintegrasikan nilai-nilai karakter pada pembelajaran matematika. Dalam hal ini pada perkuliahan geometri analitik bidang.

1.2. Pertanyaan Penelitian

1. Bagaimana bahan ajar geometri analitik bidang datar yang mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik?
2. Bagaimana mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik pada perkuliahan geometri analitik bidang datar? (tahun kedua)

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran Matematika

2.1.1. Pengertian Karakter

Aristoteles (dalam Lickona, 2014: 81) mendefinisikan karakter yang baik sebagai kehidupan dengan melakukan tindakan-tindakan yang benar sehubungan dengan diri seseorang dan orang lain. Kehidupan yang berbudi luhur termasuk kebaikan yang berorientasi pada diri sendiri (seperti kontrol diri dan moderasi) sebagaimana halnya dengan kebaikan yang berorientasi pada hal lainnya (seperti kemurahan hati dan belas kasihan), dan kedua jenis kebaikan ini berhubungan. Sedangkan Koesoema (dalam Muslich, 2014) menyatakan karakter sebagai "kepribadian yang merupakan ciri atau karakteristik dari diri seseorang yang bersumber dari bentukan-bentukan yang diterima dari lingkungan". Dalam bagian yang sama, Winnie menyatakan ada dua pengertian karakter. Pertama, ia menunjukkan bagaimana seseorang bertingkah laku. Kedua, berkaitan dengan "personality". Seseorang disebut berkarakter apabila tingkah lakunya sesuai dengan kaidah moral.

Jadi, karakter adalah cara bertingkah laku yang merupakan bentukan dari lingkungan. Lingkungan ini, misalnya keluarga, sekolah dan masyarakat.

Karakter terdiri dari nilai operatif, nilai dalam tindakan. Kita berproses dalam karakter kita, seiring suatu nilai menjadi suatu kebaikan, suatu disposisi batin yang dapat diandalkan untuk menanggapi situasi dengan cara yang menurut moral itu baik.

Karakter memiliki tiga bagian yang saling berhubungan yaitu pengetahuan moral, perasaan moral dan perilaku moral. Karakter yang baik terdiri dari mengetahui hal yang baik, menginginkan hal yang baik dan melakukan hal yang baik-kebiasaan dalam cara berpikir, kebiasaan dalam hati, dan kebiasaan dalam tindakan. Ketiga hal ini diperlukan untuk mengarahkan suatu kehidupan moral; ketiganya ini membentuk kedewasaan moral.

2.1.2. Komponen Karakter Yang Baik

2.1.2.1. Pengetahuan Moral

Terdapat banyak jenis pengetahuan moral berbeda seiring dengan moral kehidupan. Berikut ini mengidentifikasi kualitas moral tertentu, ciri-ciri karakter yang membentuk pengetahuan moral, perasaan moral dan tindakan moral.

a. Kesadaran Moral

Kegagalan moral yang lazim di seluruh usia adalah kebutaan moral, tidak melihat bahwa situasi yang dihadapi melibatkan perasaan moral dan memerlukan penilaian moral. Tanggung jawab moral yang pertama adalah menggunakan pemikiran untuk melihat suatu situasi yang memerlukan penilaian moral. Kedua, memahami informasi dari permasalahan yang bersangkutan. Di dalam membuat penilaian moral, kita tidak dapat memutuskan apa yang benar sampai kita tahu apa yang benar.

b. Mengetahui Nilai Moral

Mengetahui sebuah nilai juga berarti memahami bagaimana caranya menerapkan nilai yang bersangkutan dalam berbagai macam situasi. Nilai-nilai moral seperti menghargai kehidupan dan kemerdekaan, tanggung jawab terhadap orang lain, kejujuran, keadilan, toleransi, penghormatan, disiplin diri, integritas, kebaikan, belas kasihan, dan dorongan atau dukungan mendefinisikan cara menjadi pribadi yang baik.

c. Penentuan Perspektif

Penentuan Perspektif merupakan kemampuan untuk mengambil sudut pandang orang lain, melihat situasi sebagaimana adanya, membayangkan bagaimana mereka berfikir, bereaksi dan merasakan masalah yang ada. Sasaran fundamental pendidikan moral haruslah membantu siswa mengalami dunia dari sudut pandang orang lain, terutama sudut pandang orang-orang yang berbeda dari mereka sendiri.

d. Pemikiran Moral

Pemikiran moral melibatkan pemahaman apa yang dimaksud dengan moral dan mengapa harus aspek moral. Mengapa penting untuk menepati janji? Melakukan pekerjaan terbaik? Membagikan apa yang dimiliki dengan orang lain?

e. Pengambilan Keputusan

Pengambilan keputusan merupakan keahlian yang perlu dimiliki peserta didik. Pertimbangan pendekatan yang dipilih terhadap permasalahan moral, pendekatan yang dipilih dan konsekuensi terhadap pengambilan keputusan tersebut.

f. Pengetahuan Pribadi

Mengetahui diri sendiri merupakan jenis pengetahuan moral yang paling sulit untuk diperoleh, namun perlu untuk pengembangan karakter. Menjadi orang yang bermoral memerlukan keahlian untuk mengulas kelakuan sendiri dan mengevaluasi perilaku secara kritis.

2.1.2.2. Perasaan Moral

Mengetahui apa yang benar bukan merupakan jaminan melakukan tindakan yang baik. Kita bisa jadi sangat pintar tentang hal yang baik dan benar tetapi memilih yang salah. Perilaku moral dipengaruhi oleh kepedulian terhadap sikap jujur, adil dan pantas terhadap orang lain. Aspek-aspek kehidupan emosional moral seperti hati nurani, harga diri, empati, mencintai hal yang baik, kendali diri dan kerendahan hati menjamin karakter yang baik.

2.1.2.3. Tindakan Moral

Tindakan moral merupakan hasil dari pengetahuan moral dan perasaan moral. Apabila seseorang memiliki kualitas moral kecerdasan dan emosi maka orang itu mungkin melakukan apa yang diketahui dan dirasa benar.

Mengetahui apa yang harus dilakukan, merasakan apa yang harus dilakukan tetapi tidak otomatis bisa menerjemahkan pikiran dan perasaan ke dalam tindakan. Hal ini seringkali terjadi. Berkaitan dengan hal ini perlu diketahui aspek karakter lainnya yaitu kompetensi, keinginan dan kebiasaan.

Kompetensi moral memiliki kemampuan untuk mengubah penilaian dan perasaan moral ke dalam tindakan moral yang efektif. Misalnya, untuk memecahkan suatu konflik dengan adil, diperlukan keahlian praktis seperti mendengarkan, menyampaikan sudut pandang tanpa mencemarkan nama baik orang lain dan mengusahakan solusi yang dapat diterima semua pihak.

Menjadi orang baik seringkali memerlukan tindakan keinginan yang baik, suatu penggerakan energi moral untuk melakukan apa yang dipikir harus dilakukan. Diperlukan keinginan untuk menjaga emosi di bawah kendali pemikiran, keinginan untuk melihat dan berfikir melalui seluruh dimensi moral dalam suatu situasi. Diperlukan keinginan untuk melaksanakan tugas, keinginan untuk menolak godaan teman sebaya dan melawan gelombang.

Dalam situasi yang besar, pelaksanaan tindakan moral memperoleh manfaat dari kebiasaan. Orang-orang yang memiliki karakter yang baik "bertindak sebenarnya, dengan loyal, dengan berani, dengan baik, dan dengan adil tanpa merasa amat tertekan oleh arah tindakan sebaliknya" (William Bennet, dalam Lickona, 2014: 99). Seringkali orang-orang melakukan hal yang baik karena dorongan kebiasaan.

2.2. Matematika

Herman Hudojo menyatakan bahwa: “matematika merupakan ide-ide abstrak yang diberi simbol-simbol yang tersusun secara hirarkis dan penalarannya deduktif. Sedangkan James dalam kamus matematikanya menyatakan bahwa “Matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran dan konsep-konsep berhubungan lainnya dengan jumlah yang banyak yang terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljabar, analisis dan geometri.”

Di dalam matematika yang diolah adalah gagasan yang abstrak. Pada umumnya gagasan atau konsep yang abstrak bermula dari hal nyata dan konkrit kemudian berkembang menjadi konsep yang abstrak dan sekaligus memiliki daya lingkup yang jauh lebih luas daripada yang dimiliki oleh objek semula. Proses pengabstrakan ini merupakan ciri khas matematika. Kemampuan ini memungkinkan mahasiswa menembus keterbatasan yang dimiliki oleh pancaindranya dan membahas segala sesuatunya dengan akal, intelek dan penalaran.

2.2.1. Nilai-Nilai yang Terdapat di dalam Matematika

Jika ditelusuri maka di dalam matematika terdapat tiga macam nilai utama.

1. Nilai praktis

Pengetahuan dasar tentang matematika serta ketrampilan menggunakannya merupakan kebutuhan. Hal ini bisa dilihat dalam kehidupan sehari-hari. Untuk mempelajari bidang lainnyapun, bantuan matematika amat diperlukan.

2. Nilai-nilai Disiplin

Matematika merupakan salah satu sarana untuk menanamkan kebiasaan menalar dalam jiwa. Matematika juga ilmu yang eksak, benar dan senantiasa langsung menuju sasaran. Karena itu dapat menumbuhkan disiplin dalam jiwa. Untuk menyatakan kebenaran atau kesalahan pernyataan harus mempunyai alasan yang tepat. Penalaran matematika amat baik dan cocok untuk melatih jiwa peserta didik akan kesederhanaan, ketepatan hasil, keaslian/originalitas, memeriksa dan menguji hasil.

3. Nilai Budaya

Matematika adalah buatan atau ciptaan manusia. Matematika diciptakan karena desakan kebutuhan dan untuk mempermudah pemecahan masalah yang dihadapi. Nilai-nilai sehubungan dengan nilai budaya adalah pengembangan daya konsentrasi, sifat ekonomis, kemampuan mengeluarkan pendapat, percaya kepada diri sendiri, hasrat untuk menemukan, hasrat untuk belajar dan membaca serta kemampuan bekerja keras.

Menurut penulis, sehubungan dengan nilai-nilai tersebut, sebenarnya pembelajaran matematika memberikan sumbangan yang penting dalam pengembangan karakter-karakter yang baik. Jadi, banyak nilai karakter yang dapat dikembangkan melalui pembelajaran matematika seperti rasa hormat, disiplin, jujur, kerja keras, kreatif, rasa ingin tahu, mandiri, komunikatif, tanggung jawab dan kerendahan hati. Berikut bahasan mengenai nilai-nilai karakter tersebut.

1. Rasa hormat, yaitu sikap saling menghormati satu dengan yang lainnya.
2. Disiplin, yaitu tindakan yang menunjukkan perilaku tertib dan patuh pada berbagai ketentuan dan peraturan.
3. Jujur, yaitu perilaku yang didasarkan pada upaya menjadikan dirinya sebagai orang yang selalu dapat dipercaya dalam perkataan, tindakan dan pekerjaan.

4. Kerja Keras, yaitu perilaku yang menunjukkan upaya sungguh-sungguh dalam mengatasi berbagai hambatan belajar dan tugas, serta menyelesaikan tugas dengan sebaik-baiknya.
5. Kreatif, yaitu berfikir dan melakukan sesuatu untuk mendapatkan cara atau hasil baru dari sesuatu yang telah dimiliki.
6. Rasa ingin tahu yaitu sikap dan tindakan yang selalu berupaya untuk mengetahui lebih mendalam dan meluas apa yang dipelajarinya, dilihat dan didengar.
7. Mandiri yaitu sikap dan perilaku yang tidak mudah bergantung kepada orang lain dalam menyelesaikan tugas-tugas.
8. Komunikatif, yaitu sikap yang mampu mengkomunikasikan pemahaman yang dimiliki baik secara lisan maupun tulisan kepada orang lain.
9. Tanggung jawab, yaitu sikap dan perilaku seseorang untuk melaksanakan tugas dan kewajibannya, yang seharusnya dia lakukan terhadap diri sendiri, masyarakat, lingkungan (alam, sosial dan budaya), negara dan Tuhan yang Maha Esa.
10. Kerendahan hati yaitu sikap mengakui kekurangan, dewasa dalam menyadari kelemahan, mau membagi ilmu dengan orang yang lebih tidak tahu.

2.3. Pengembangan Bahan Ajar

Tujuan penyusunan bahan ajar adalah: (1) menyediakan bahan ajar yang sesuai dengan tuntutan kurikulum dengan mempertimbangkan kebutuhan peserta didik, yakni bahan ajar yang sesuai dengan karakteristik dan setting atau lingkungan sosial peserta didik; (2) Membantu peserta didik dalam memperoleh alternatif bahan ajar disamping buku-buku teks yang terkadang sulit diperoleh dan (3) Memudahkan dalam melaksanakan pembelajaran.

Ada tiga metode yang dapat dipilih dalam menyusun desain bahan ajar yaitu: (1) menulis sendiri (*starting from scratch*), (2) mengemas kembali informasi (*information repackaging* atau *text transformation*) dan (3) menata informasi (*compilation* atau *wrap around text*). Masing-masing model memiliki ciri dan tingkat kesulitan pengembangan yang berbeda-beda untuk setiap penyusunnya.

Dengan bahan ajar model pertama, dosen dengan keahlian dalam bidang tertentu menulis sendiri bahan ajar. Bahan ajar disesuaikan dengan karakteristik sasaran yang akan dituju.

Bahan ajar dengan model kedua merupakan hasil pengemasan kembali informasi. Model ini paling banyak dijumpai pada pengembangan bahan ajar. Langkah penyusunannya adalah dengan mengumpulkan informasi yang sudah ada "di pasaran" untuk selanjutnya dipilah sesuai dengan kebutuhan pemenuhan standar kompetensi mata kuliah. Informasi yang terkumpul, selanjutnya ditulis kembali sesuai kaidah penyusunan bahan ajar.

Model bahan ajar penataan informasi atau kompilasi yaitu dengan mengkompilasi seluruh bahan atau materi perkuliahan yang diambil dari buku teks, jurnal ilmiah, artikel dan lain-lain. Materi-materi yang dibutuhkan dikumpulkan, dipilah dan disusun berdasar urutan perkuliahan yang tercantum dalam silabus mata kuliah. Model ini mirip dengan model mengemas kembali informasi, bedanya adalah materi yang dikumpulkan digunakan langsung sesuai dengan sumbernya.

2.3.1. Prinsip-Prinsip Pengembangan Bahan Ajar

Prinsip-prinsip yang perlu diperhatikan dalam pengembangan materi pembelajaran meliputi prinsip relevansi, konsistensi, dan adekuasi/kecukupan. Prinsip relevansi (keterkaitan) mengisyaratkan materi pembelajaran hendaknya relevan atau ada kaitan atau ada hubungannya dengan pencapaian standar kompetensi, kompetensi dasar dan standar isi. Prinsip konsistensi artinya keajegan. Jika kompetensi dasar yang harus dikuasai mahasiswa satu macam, maka materi pembelajaran yang harus diajarkan juga harus meliputi satu macam. Prinsip kecukupan terkait dengan cakupan dan urutan materi pembelajaran.

Masalah cakupan atau ruang lingkup, kedalaman, dan urutan penyampaian materi pembelajaran penting diperhatikan. Ketepatan dalam menentukan cakupan, ruang lingkup, dan kedalaman materi pembelajaran akan menghindarkan dosen mengajarkan terlalu sedikit atau terlalu banyak, terlalu dangkal atau terlalu mendalam. Sedangkan ketepatan urutan penyajian (sequencing) akan memudahkan bagi peserta didik mempelajari materi pembelajaran.

Dalam menentukan cakupan materi pembelajaran, prinsip-prinsip yang perlu diperhatikan menyangkut keluasan materi dan kedalaman materi. Keluasan materi menggambarkan berapa banyak materi-materi yang dimasukkan ke dalam pembelajaran. Sedangkan kedalaman materi adalah seberapa detail konsep-konsep yang harus dipelajari/dikuasai oleh peserta didik.

Materi pembelajaran yang sudah ditentukan ruang lingkup serta kedalamannya dapat diurutkan melalui dua pendekatan pokok, yaitu: pendekatan prosedural, dan hierarkis. Urutan materi pembelajaran secara prosedural menggambarkan langkah-langkah secara urut sesuai dengan langkah-langkah melaksanakan suatu tugas. Sementara urutan materi pembelajaran secara hierarkis menggambarkan urutan yang berjenjang dari mudah ke sulit, atau dari yang sederhana ke yang kompleks. Pada penelitian ini, penyusunan bahan ajar akan menggunakan model penataan informasi dengan memperhatikan prinsip relevansi, konsistensi, dan adekuasi/kecukupan.

2.4. Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Pada Pembelajaran Matematika

Mengintegrasikan nilai-nilai karakter ke dalam pembelajaran matematika dalam hal ini geometri analitik bidang datar, dimulai dari perencanaan, pelaksanaan hingga kepada evaluasi pembelajaran. Integrasi tersebut tampak pada pelaksanaan pembelajaran di kelas. Integrasi dapat dilakukan dengan mengadopsi beberapa model pembelajaran dengan tetap mempertimbangkan sifat materi geometri analitik datar yang dibahas, karakteristik mahasiswa dan kondisi psikis mahasiswa pada saat pembelajaran berlangsung serta waktu dilaksanakannya pembelajaran.

2.4.1. Perencanaan Pembelajaran

Pada perencanaan pembelajaran, Rencana Pembelajaran Semester (RPS), satuan acara perkuliahan termasuk kegiatan pembelajaran dan bahan ajar dirancang agar muatannya sesuai dengan pengembangan karakter. Kegiatan pembelajaran yang dirancang harus bersifat memfasilitasi pengetahuan nilai-nilai moral, menyadari pentingnya nilai-nilai dan diinternalisasinya nilai-nilai.

2.4.2. Pelaksanaan Pembelajaran

Di dalam pelaksanaan pembelajaran di kelas, peserta didik didorong untuk melakukan tindakan moral. Pada kegiatan pendahuluan hal yang perlu dilakukan:

- 1) Menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran.
- 2) Mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dibahas.
- 3) Menjelaskan tujuan pembelajaran sebagaimana yang tercantum dalam rencana pembelajaran semester (RPS).
- 4) Menjelaskan model pembelajaran yang akan dilakukan hari itu, dan seterusnya.

Menurut Lickona (2014) di dalam ruang kelas, dengan pendekatan komprehensif seorang pengajar dituntut untuk:

- a. Bertindak sebagai seorang penyayang, model dan mentor, memperlakukan siswa dengan kasih sayang dan respek, memberikan contoh yang baik, mendukung kebiasaan yang bersifat sosial dan memperbaiki jika ada yang salah.
- b. Menciptakan suatu komunitas bermoral di dalam ruang kelas, membantu siswa untuk saling mengenal, saling menghormati dan menjaga satu sama lain, dan merasa bagian dari kelompok tersebut.
- c. Berlatih memiliki disiplin moral, menggunakan aturan-aturan sebagai kesempatan untuk membantu menegakkan moral, kontrol terhadap diri sendiri dan sebuah generalisasi rasa hormat bagi orang lain.
- d. Menciptakan lingkungan kelas yang demokratis, melibatkan siswa dalam pengambilan keputusan dan berbagi tanggung jawab untuk menciptakan ruang kelas yang baik, serta nyaman untuk belajar.
- e. Mengajarkan nilai-nilai yang baik melalui kurikulum, menggunakan pelajaran akademik sebagai kendaraan untuk membahas permasalahan etika.
- f. Menggunakan pendekatan pembelajaran kooperatif dalam mengajar anak-anak untuk bersikap dan dapat saling membantu, serta bekerjasama.

- g. Mengembangkan "seni hati nurani" dengan membantu mereka mengembangkan tanggung jawabnya secara akademik dan rasa hormat terhadap nilai-nilai belajar dan bekerja.
- h. Menyemangati siswa untuk merefleksikan moral melalui membaca, menulis, berdiskusi, latihan membuat keputusan, dan berargumen.
- i. Mengajarkan mereka mencari resolusi dari sebuah konflik sehingga para siswa memiliki kapasitas dan komitmen untuk memecahkan masalah tanpa kekerasan.

Pada dasarnya, kegiatan pendahuluan, kegiatan inti dan kegiatan penutup pada pelaksanaan pembelajaran akan mengikuti langkah-langkah pembelajaran yang dipilih oleh dosen dengan pertimbangan sebagaimana yang disebutkan di atas. Di kelas, mengintegrasikan karakter yang baik pada mahasiswa dapat dimulai oleh dosen dengan memberikan keteladanan yang mencerminkan karakter yang ingin ditanamkan kepada mahasiswa melalui pembelajaran matematika di kelas.

2.4.3. Evaluasi Hasil Belajar dan Karakter

Beberapa teknik-teknik penilaian seperti tes lisan, tertulis, penilaian tugas, penilaian diri dapat dikembangkan oleh dosen. Penilaian tentang kebibadian dan perilaku peserta didik yang mencerminkan nilai-nilai karakter dapat dilakukan dengan teknik observasi.

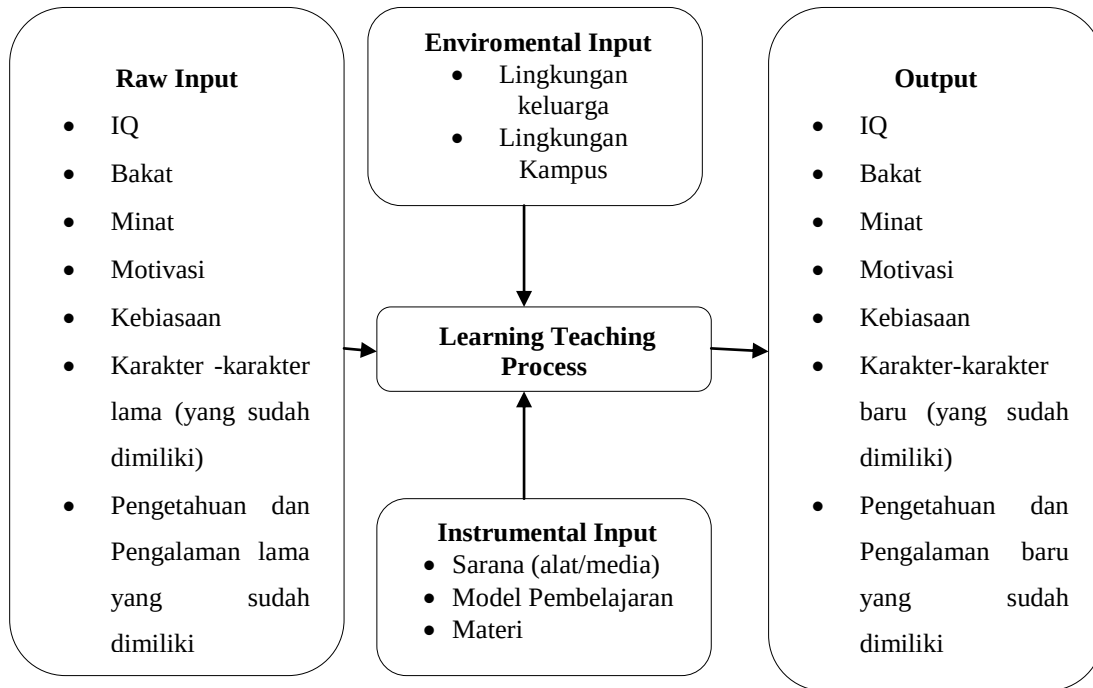
2.5. Kerangka Berfikir

Mengintegrasikan nilai-nilai karakter ke dalam pembelajaran matematika dalam hal ini geometri analitik bidang datar, dimulai dari perencanaan, pelaksanaan hingga kepada evaluasi pembelajaran.

Pada perencanaan pembelajaran, rencana pembelajaran semester (RPS), satuan acara perkuliahan termasuk kegiatan pembelajaran dan bahan ajar dirancang agar muatannya sesuai dengan pengembangan karakter. Kegiatan pembelajaran yang dirancang harus bersifat memfasilitasi pengetahuan nilai-nilai moral, menyadari pentingnya nilai-nilai dan diinternalisasinya nilai-nilai.

Hal ini sebagaimana yang dinyatakan oleh Sijabat (20016) bahwa "pengembangan nilai-nilai karakter yang baik bisa berjalan efektif jika didukung oleh

komponen-komponen yang ada. Komponen tersebut adalah mahasiswa (*raw input*), proses pembelajaran (*learning teaching process*), sarana dan prasarana (*instrumental input*) serta lingkungan (*enviromental input*) sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut".



Gambar 2.1. Kerangka Pemikiran

Komponen-komponen di atas diolah dalam proses pembelajaran sehingga menghasilkan *output* (mahasiswa) yang mempunyai karakter yang baik. Nilai-nilai karakter yang muncul sebagaimana yang dinyatakan oleh Kemendiknas yaitu religius, kejujuran, toleransi, disiplin, demokratis, teliti, kerja keras, kreatif, rasa ingin tahu, dan tanggung jawab.

BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1. Tujuan Penelitian

Tujuan umum dari penelitian ini mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik pada pembelajaran matematika yaitu Geometri Analitik Bidang Datar. Dari penelitian ini diharapkan akan mendapatkan perangkat pembelajaran Geometri Analitik Bidang dimana nilai-nilai karakter terintegrasi di dalamnya. Perangkat yang dimaksud adalah Rencana Pembelajaran Semester (RPS), model pembelajaran yang sesuai hingga bahan ajar Geometri Analitik Bidang. Sehingga tujuan khusus penelitian ini pada setiap tahap sebagai berikut.

Tujuan Khusus Tahun Pertama

- a. Mengidentifikasi kebutuhan penelitian
- b. Identifikasi nilai-nilai karakter yang baik yang diintegrasikan pada pembelajaran matematika.
- c. Perancangan untuk menyiapkan prototipe bahan ajar yang mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik.

Tujuan Khusus Tahun Kedua

- a. Ujicoba bahan ajar setelah divalidasi ahli dan diperbaiki berdasarkan saran para ahli.
- b. Analisis data untuk melihat efektivitas bahan ajar
- c. Evaluasi bahan ajar

Jenis luaran penelitian dapat ditunjukkan sebagaimana berikut ini.

Tabel 3.1. Jenis Luaran

No	Jenis Luaran		Indikator		
			TS	TS+1	TS+2
1	Publikasi ilmiah ²⁾	Internasional			
		Nasional	draft		
2	Pemakalah dalam temu ilmiah	Internasional			
		Nasional	draft		
3	Invited speaker dalam temu ilmiah	Inter nasional			
		Nasional			
4	Visiting lecturer	Internasional			
5	Hak Kekayaan Intelektual (Haki)	Paten			
		Paten sederhana			
		Hak cipta			
		Merk dagang			
		Rahasia dagang			
		Desain produk industri			
		Indikasi geografis			
		Perlindungan varietas tanaman			
6	Teknologi tepat guna				
7	Model/Purwarupa/Desain/Karya Seni/Rekayasa Sosial				
8	Buku Ajar (ISBN)		Draft		
9	Tingkat Kesiapan Teknologi (TKT)				

3.2. Manfaat Penelitian

Penelitian ini secara praktis dan teoritis akan bermanfaat bagi Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Kependidikan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara dalam rangka mempersiapkan lulusan yang kompeten dalam bidang matematika yang berkarakter yang baik.

Manfaat yang timbul dari penelitian ini adalah:

1. Tersedianya perangkat pembelajaran geometri analitik bidang datar yang mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik.
2. Pengetahuan mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik pada pembelajaran matematika.

BAB 4. METODE PENELITIAN

4.1. Lokasi Penelitian

Penelitian dilaksanakan di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara.

4.2. Prosedur Penelitian

Jenis penelitian adalah penelitian pengembangan. Perangkat pembelajaran yang dikembangkan pada tahun I, meliputi RPS (Rencana Perkuliahan Semester), Satuan Acara Perkuliahan dan Bahan Ajar Geometri Analitik Bidang. Model pengembangan yang digunakan mengacu pada model 4-D yang terdiri dari empat tahap. Keempat tahap tersebut adalah define, design, develop dan disseminate. Pada penelitian ini, model digunakan tidak sampai pada tahap desiminasi.

Rincian empat tahap yang dinyatakan di atas adalah sebagai berikut.

1. Tahap Mendefinisi (Define)

Pada tahap ini kegiatan terfokus pada analisis terhadap situasi yang dihadapi dosen, karakteristik mahasiswa, konsep-konsep yang diajarkan dan diakhiri dengan perumusan tujuan pembelajaran. Tujuan tahap ini untuk menetapkan dan mendefinisikan syarat-syarat pembuatan pembelajaran dengan menganalisis tujuan dan batasan materi pembelajaran.

Kegiatan analisis yang dilalui pada tahap ini adalah analisis awal akhir, analisis mahasiswa, analisis tugas, analisis konsep dan penetapan tujuan pembelajaran.

a. Analisis Awal Akhir

Kegiatan analisis awal akhir dilakukan untuk menetapkan masalah dasar yang diperlukan dalam pengembangan perangkat pembelajaran. Pada tahap ini dilakukan analisis pada bahasan geometri analitik bidang datar, teori belajar yang relevan dan tantangan serta tuntutan masa depan sehingga diperoleh deskripsi pola pembelajaran yang dianggap paling sesuai.

b. Analisis Mahasiswa

Analisis mahasiswa merupakan telaah tentang karakteristik mahasiswa yang sesuai dengan rancangan dan pengembangan perangkat pembelajaran. Karakteristik ini meliputi latar belakang pengetahuan dan perkembangan kognitif mahasiswa.

c. Analisis Konsep

Analisis konsep ditujukan untuk mengidentifikasi, merinci dan menyusun secara sistematis konsep-konsep yang relevan yang akan diajarkan berdasarkan analisis awal-akhir. Analisis ini merupakan dasar dalam menyusun tujuan pembelajaran.

d. Analisis Tugas

Analisis tugas merupakan pengidentifikasian tugas/ketrampilan-ketrampilan utama yang dilakukan mahasiswa selama pembelajaran. Kemudian menganalisisnya ke dalam suatu kerangka sub keterampilan yang lebih spesifik.

e. Perumusan/Spesifikasi Tujuan Pembelajaran

Tahap ini dilakukan untuk merumuskan hasil analisis tugas dan analisis konsep menjadi indikator pencapaian hasil belajar. Rangkaian indikator pencapaian hasil belajar ini selanjutnya menjadi tujuan pembelajaran yang merupakan dasar dalam menyusun rancangan perangkat pembelajaran dan tes.

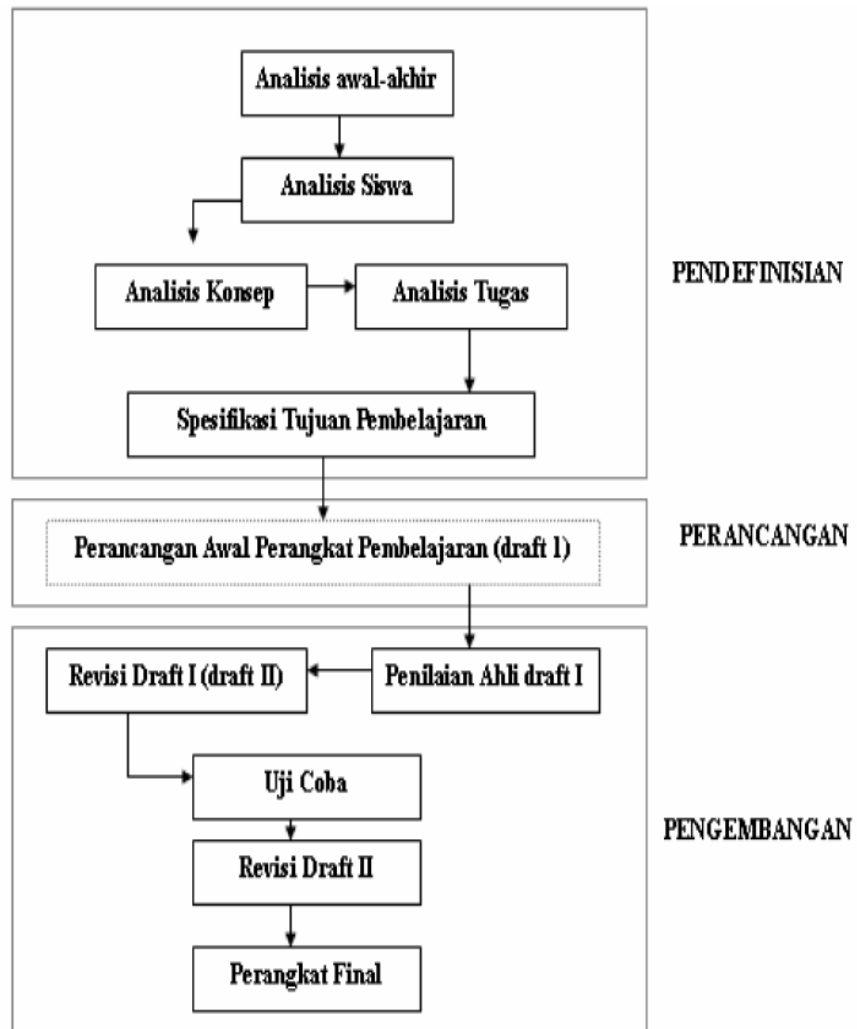
2. Tahap Perancangan (Design)

Tahap ini bertujuan untuk merancang prototipe perangkat pembelajaran. Terdiri dari empat langkah yang meliputi:

- a) Identifikasi Nilai-Nilai Karakter yang baik yang dapat diintegrasikan dalam pembelajaran
- b) Pemilihan model pembelajaran
- c) Pemilihan bahan ajar
- d) Desain awal

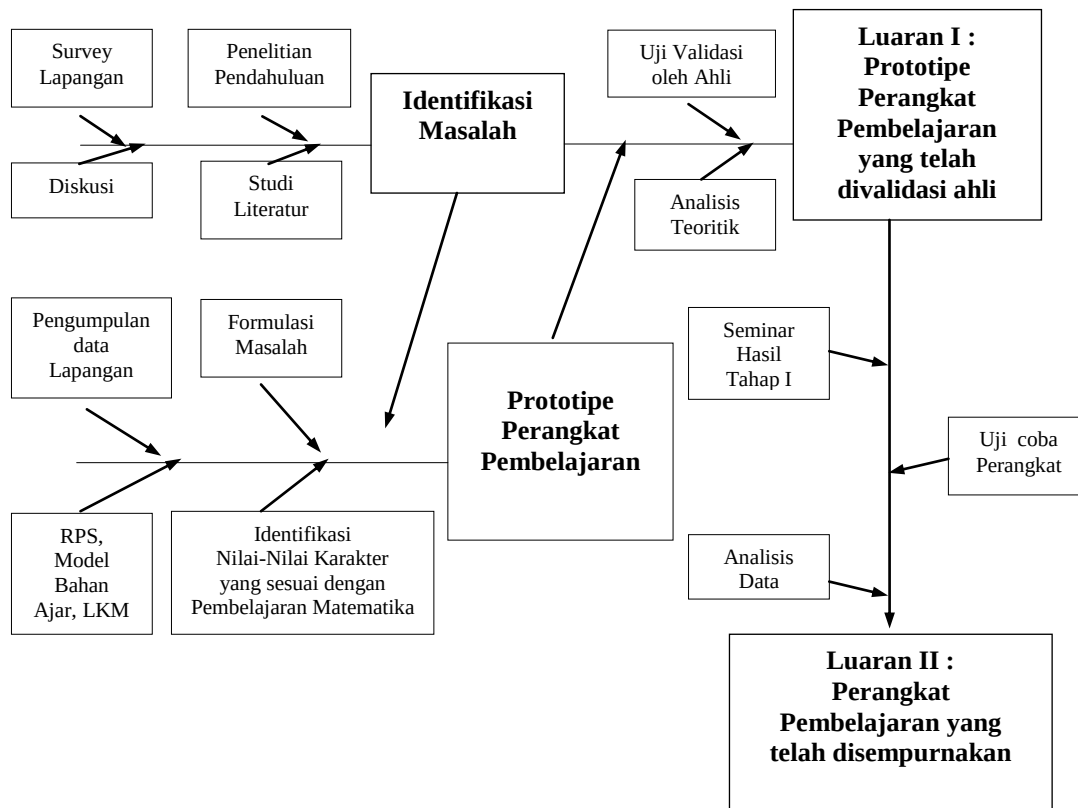
3. Tahap Pengembangan (Develop)

Tujuan tahap pengembangan adalah untuk menghasilkan draft perangkat pembelajaran yang telah direvisi dari ahli dapat digunakan dalam ujicoba terbatas. Tahap ini terdiri beberapa tahapan yaitu (1) perancangan awal perangkat pembelajaran, draft I, (2) validasi yang dilakukan oleh Ahli menghasilkan draft II (3) melakukan ujicoba terbatas, melakukan simulasi RP tertentu menghasilkan draft III, (3), dianalisis dan revisi draft III menghasilkan perangkat pembelajaran



Gambar 4.1. Bagan Aliran Penelitian Sesuai dengan Model 4-D yang di Modifikasi

Rencana kegiatan penelitian dalam setiap tahap diperlihatkan dalam bagan alir penelitian berikut :



Gambar 4.2. Bagan Aliran Penelitian Sesuai dengan *Fishbone Diagram*

Sedangkan pada penelitian tahap II nanti gejala yang akan diselidiki adalah gambaran dari beberapa hal yang berkaitan dengan penggunaan perangkat pembelajaran pada perkuliahan geometri analitik bidang dimana nilai-nilai karakter yang baik terintegrasi di dalamnya.

4.3. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Dokumentasi, memperoleh informasi yang berkaitan dengan integrasi nilai-nilai karakter yang baik pada pembelajaran matematika.
2. Observasi (pengamatan), memperoleh informasi yang berkaitan dengan kualitas pelaksanaan kegiatan belajar mengajar dan karakteristik mahasiswa.

4.4. Teknik Analisis Data

Tujuan analisis data adalah untuk menjawab permasalahan penelitian. Adapun teknik analisis data dilakukan dalam tiga tahap yaitu tahap reduksi data, tahap penyajian data dan tahap penarikan kesimpulan sebagaimana diuraikan berikut ini.

1. Tahap Reduksi Data

Kegiatan pada tahap ini meliputi proses menyeleksi, memfokuskan, mengabstraksikan dan memformulasikan semua data yang diperoleh dari lapangan.

2. Tahap Penyajian Data

Tahap ini meliputi kegiatan menuliskan kumpulan data yang tersusun/terorganisasi berkaitan dengan pertanyaan penelitian sehingga memungkinkan untuk menarik kesimpulan dari data yang telah dikumpulkan.

3. Penarikan Keputusan

Penarikan kesimpulan dilakukan berdasarkan pada reduksi data dan sajian data yang merupakan jawaban atas masalah penelitian.

4.5. Indikator Pencapaian

Keberhasilan penelitian ini dilihat dari indikator yang telah ditetapkan yakni (1) tersedianya draft perangkat pembelajaran yaitu rencana pembelajaran semester, satuan acara perkuliahan dan bahan ajar geometri analitik bidang dimana nilai-nilai karakter terintegrasi di dalamnya.

BAB 5. HASIL DAN LUARAN YANG DICAPAI

5.1. Hasil Penelitian

Sebagaimana dinyatakan pada bab sebelumnya, kegiatan analisis yang telah dilalui pada tahap ini adalah analisis awal akhir, analisis mahasiswa, analisis tugas, analisis konsep dan penetapan tujuan pembelajaran.

5.1.1. Analisis Awal Akhir

Pada tahap ini dilakukan analisis kurikulum, teori belajar yang relevan dan tantangan serta tuntutan masa depan agar mahasiswa yang dihasilkan mempunyai karakter yang baik. Dengan demikian diperoleh deskripsi pola pembelajaran yang dianggap paling sesuai.

5.1.1.1. Kurikulum

Menurut kurikulum pendidikan matematika UMSU, mata kuliah geometri analitik bidang datar ini adalah dasar untuk memprogram mata kuliah geometri analitik ruang, matematika sekolah menengah dan kalkulus lanjut pada semester berikutnya. Oleh karena itu, perlu penekanan yang kuat terhadap pentingnya materi pada mata kuliah ini sebagai landasan untuk mempelajari mata kuliah-matakuliah tersebut. Sebagai contoh, garis pada bidang akan mendasari garis pada ruang, vektor pada bidang akan mendasari vektor pada ruang, lingkaran akan mendasari bola, parabola akan mendasari paraboloida, ellips akan mendasari ellipsoida, hiperbola akan mendasari hiperboloida.

Analisis terhadap kurikulum sekolah menengah terkait dengan geometri analitik bidang datar juga dilakukan. Hasil pendalaman terhadap materi sekolah menengah, pertama materi yang terkait adalah letak titik pada bidang koordinat kartesius dan koordinat kutub, vektor pada bidang, garis pada bidang, lingkaran, parabola, ellips dan hiperbola. Kedalaman pembahasan pada materi lingkaran, parabola, ellips dan hiperbola hanya sampai kepada garis singgung pada tempat-tempat kedudukan tersebut.

Pada bahan ajar yang telah disusun, disamping mengakomodasi materi-materi sekolah menengah yang terkait dengan geometri analitik bidang datar di atas, juga mempertimbangkan bahwa mata kuliah ini adalah dasar untuk mendalami mata kuliah geometri analitik ruang, kalkulus dan matematika sekolah menengah. Sehingga kedalaman materi juga sangat diperhatikan. Sebagai contoh, materi lingkaran sampai kepada pembahasan berkas lingkaran. Sedangkan pada parabola, elips dan hiperbola,

pembahasan sampai kepada titik dan garis polar terhadap parabola, elips dan hiperbola. Bahkan pada bahan ajar hiperbola, pembahasan sampai kepada hiperbola-hiperbola sekawan.

Jadi, berdasarkan analisis kurikulum, materi geometri analitik bidang datar adalah sebagaimana pada tabel 5.1 berikut ini.

Tabel 5.1. Capaian Mata Kuliah dan Indikator Geometri Analitik Bidang

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CP)	Indikator
Materi: Sistem Koordinat 1. Menentukan letak titik pada bidang koordinat. 2. Menghitung jarak antara dua titik yang ditentukan. 3. Menentukan koordinat titik pada garis yang melalui dua titik yang ditentukan 4. Menentukan letak titik pada koordinat kutub. Materi: Vektor Pada Bidang 1. Menentukan vektor letak. 2. Menentukan hasil kali skalar dua vektor. 3. Menentukan persamaan vector suatu garis lurus. Materi: Persamaan Garis Lurus 1. Menyusun persamaan garis lurus. 2. Mengidentifikasi kedudukan dua garis lurus. 3. Menghitung jarak titik dan garis. 4. Menentukan sudut antara dua garis.	• Ketepatan menggambarkan titik pada bidang koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub. • Ketepatan menghitung jarak dua titik. • Ketepatan menentukan letak titik pada bidang koordinat khutub. • Ketepatan menentukan persamaan vektor suatu garis lurus. • Ketepatan merumuskan persamaan garis lurus • Ketepatan mengidentifikasi kedudukan dua garis. • Ketepatan menghitung jarak titik dan garis • Ketepatan menentukan sudut antara dua

5. Menentukan titik potong dua garis. 6. Menentukan persamaan berkas garis. Materi: Lingkaran 1. Menyusun persamaan lingkaran. 2. Menentukan garis singgung pada lingkaran. 3. Menyusun garis kutub. 4. Menentukan kuasa suatu titik pada lingkaran. 5. Menyusun garis kuasa. 6. Menentukan titik kuasa. 7. Mengidentifikasi Kedudukan Dua Lingkaran. Materi: Ellips 1. Menyusun persamaan ellips. 2. Membuat sketsa grafik elips. 3. Menentukan garis singgung pada ellips. 4. Menentukan Titik dan Garis Polar Materi: Parabola 1. Menyusun persamaan parabola 2. Membuat sketsa grafik parabola 3. Menentukan garis singgung pada parabol. 4. Titik dan Garis Polar Materi: Hiperbola 1. Menyusun persamaan hiperbul.	garis • Ketepatan menentukan titik potong dua garis • Ketepatan menyusun persamaan lingkaran, • Ketepatan menentukan garis singgung pada lingkaran, kuasa suatu titik pada lingkaran, garis kutub, titik kuasa dan garis kuasa. • Ketepatan mengidentifikasi kedudukan dua lingkaran • Ketepatan menyusun persamaan elips • Ketepatan membuat sketsa elips • Ketepatan menyusun garis singgung pada ellips • Ketepatan menentukan titik dan garis polar terhadap suatu ellips. • Ketepatan menyusun persamaan parabola • Ketepatan membuat sketsa grafik parabola • Ketepatan menentukan garis singgung pada parabola, • Ketepatan menentukan titik dan garis polar terhadap suatu parabola. • Ketepatan menyusun persamaan hiperbola.
--	---

2. Menggambarkan hiperbola. 3. Menentukan garis singgung pada hiperbul. 4. Menentukan Titik dan Garis Polar 5. Menentukan hiperbola-hiperbola sekawan.	• Ketepatan menggambarkan hiperbola. • Ketepatan menentukan persamaan garis singgung pada hiperbola • Ketepatan menentukan titik dan garis polar terhadap suatu hiperbola, • Ketepatan menentuka hiperbola-hiperbola sekawan.
---	--

5.1.1.2. Analisis Mahasiswa

Analisis karakteristik mahasiswa dilakukan dengan observasi terhadap mahasiswa yang memprogram matakuliah geometri analitik datar pada semester genap tahun akademik 2016/2017. Observasi dilakukan selama satu semester. Hasil analisis karakteristik mahasiswa adalah: a) Latar belakang pemahaman terhadap konsep-konsep geometri analitik bidang datar sangat rendah; b) Setelah mengikuti perkuliahan selama tujuh kali pertemuan, pergerakan pemahaman tidak seperti yang diharapkan. Hal ini tampak pada ujian tengah semester dimana nilai sebagian besar mahasiswa berada di bawah 60; c) Kecenderungan untuk mengikuti penyelesaian pada contoh lebih besar daripada usaha untuk mencoba menyelesaikan dengan cara sendiri, soal-soal yang diberikan dalam perkuliahan geometri analitik. Jadi, mahasiswa cenderung kurang termotivasi untuk kreatif; d) Pada waktu presentasi, hanya sebagian kecil dari mahasiswa yang berusaha menguasai materi geometri analitik bidang datar yang ditugaskan kepada kelompoknya; e) Kemampuan mahasiswa dalam menggambarkan grafik elips, parabola dan hiperbola sangat kurang. Terutama jika pusat tempat-tempat kedudukan tersebut bukan pada titik asal; f. Kemampuan membuktikan teorema dalam geometri analitik bidang datar sangat kurang.

Hasil observasi terhadap karakteristik mahasiswa ini sesuai dengan hasil penelitian tindakan kelas yang sebelumnya dilakukan oleh Panggabean (2015). Pada siklus I dengan bahasan Garis Pada Bidang, ditemukan bahwa

"Sebahagian besar mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam memahami materi perkuliahan. Kesulitan tersebut tampak dari kesalahan-kesalahan mahasiswa dalam

menjawab tes hasil belajar tersebut. Kesalahan-kesalahan tersebut lalu diidentifikasi dan hasilnya adalah sebagai berikut.

- Salah dalam menentukan titik-titik potong terhadap sumbu X dan sumbu Y, akibatnya salah dalam menggambar grafik garis lurus pada bidang koordinat.
- Dapat menentukan titik-titik potong tetapi salah dalam meletakkan titik-titik tersebut pada bidang koordinat.
- Sebagian mahasiswa dapat menentukan titik potong garis terhadap salah satu sumbu X atau Y tetapi tidak keduanya. Dalam hal ini mahasiswa lupa teorema yang menyatakan "dari dua titik dapat dibuat satu garis".
- Salah dalam menentukan gradien garis lurus. Akibatnya salah dalam menghitung sudut yang dibentuk oleh dua garis lurus.
- Dapat menentukan gradien garis tetapi salah dalam prosedur menentukan sudut yang dibentuk oleh dua garis.
- Salah dalam prosedur menentukan jarak titik terhadap garis.
- Benar dalam prosedur menentukan jarak titik terhadap garis tetapi hasil akhir bernilai negatif.
- Salah dalam menulis persamaan berkas garis.

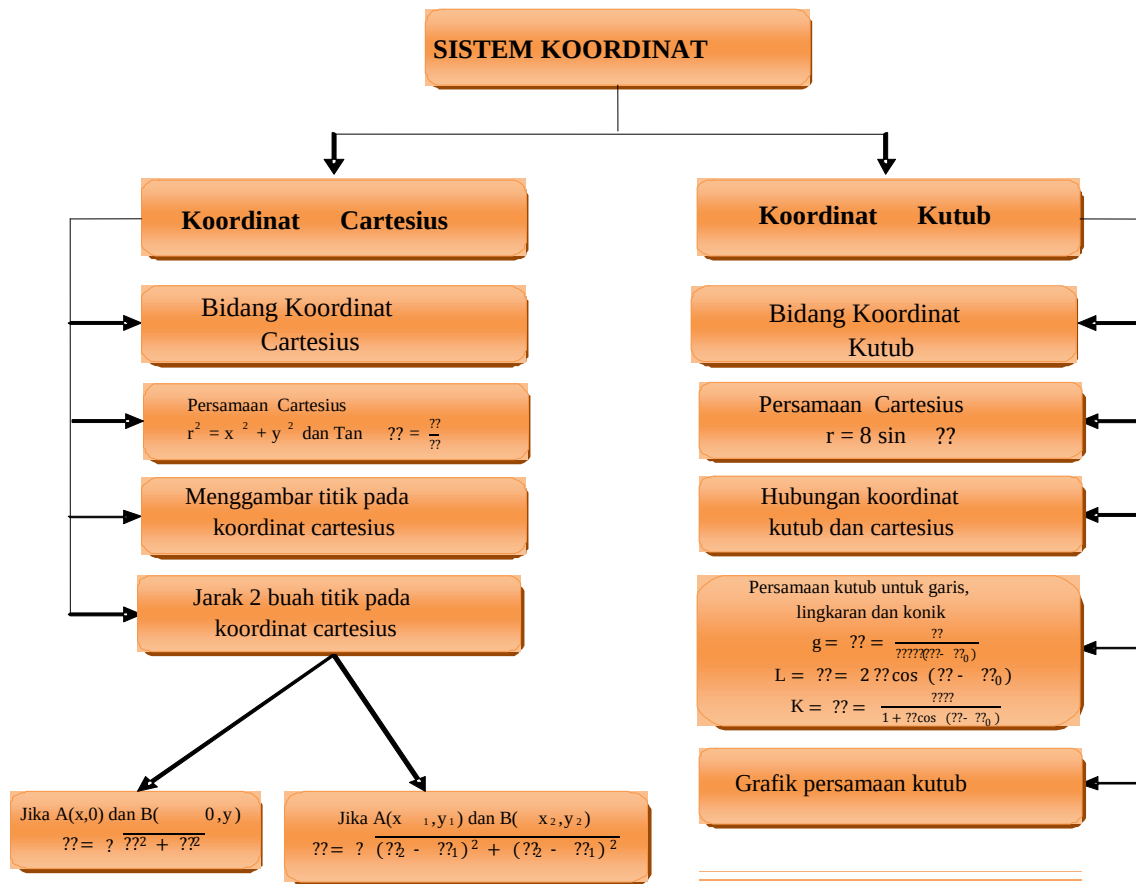
Demikian juga pada siklus II. Temuannya, beberapa mahasiswa masih mengalami kesulitan memahami materi lingkaran. Hal ini ditunjukkan oleh kesalahan-kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa dalam menyelesaikan tes hasil belajar, yaitu:

- Dalam menentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik, mahasiswa dapat menulis 3 persamaan dengan 3 bilangan yang tidak diketahui tetapi tidak dapat menyelesaikan sistem persamaan linier tersebut.
- Salah dalam menentukan jari-jari dan pusat lingkaran.
- Salah dalam menentukan persamaan garis singgung yang sejajar sumbu Y, sejajar sumbu X dan persamaan garis singgung yang di sebuah titik yang ditentukan..

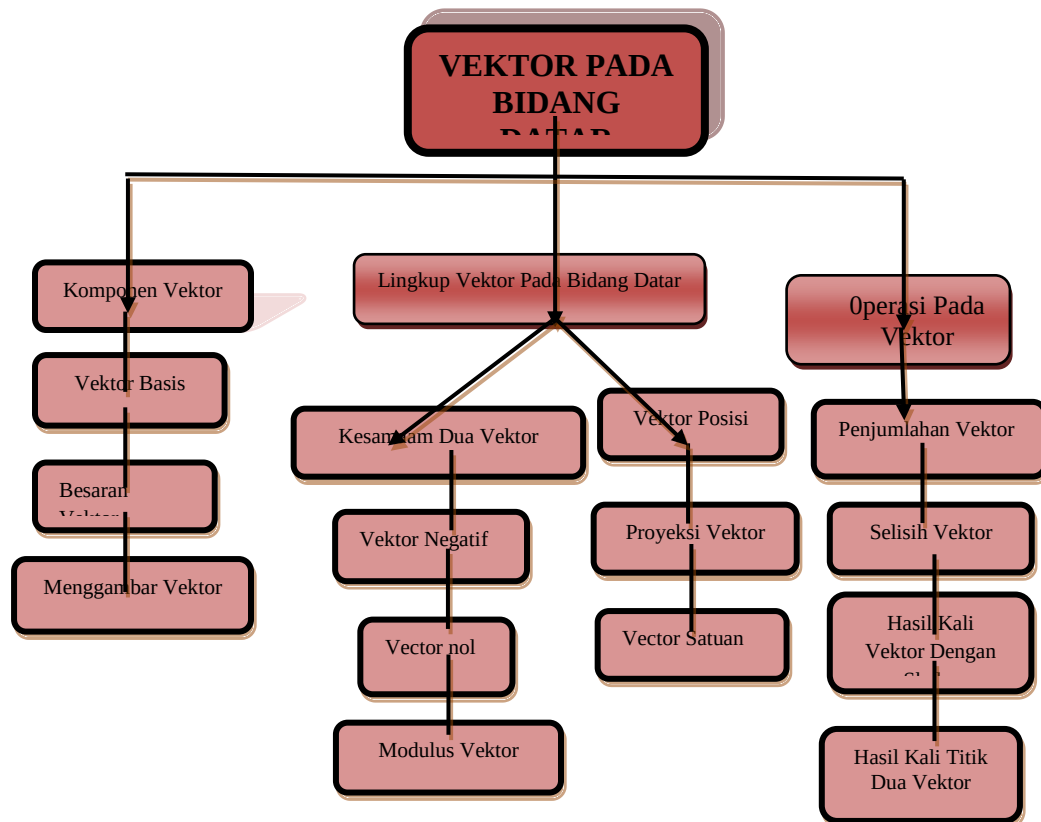
Berdasarkan hasil analisis karakteristik mahasiswa dan hasil penelitian tersebut di atas, untuk memfasilitasi dan memperbaiki kemampuan mahasiswa dalam memahami suatu konsep, menggambarkan grafik irisan kerucut, membuktikan teorema dan terintegrasi penanaman karakter yang baik maka disusunlah bahan ajar geometri analitik bidang datar sesudah menyusun rencana pembelajaran semester, satuan acara perkuliahan. Penyusunan dilakukan sesudah menganalisa konsep dan analisis tugas yang harus dilakukan oleh mahasiswa.

5.1.1.3. Analisis Konsep

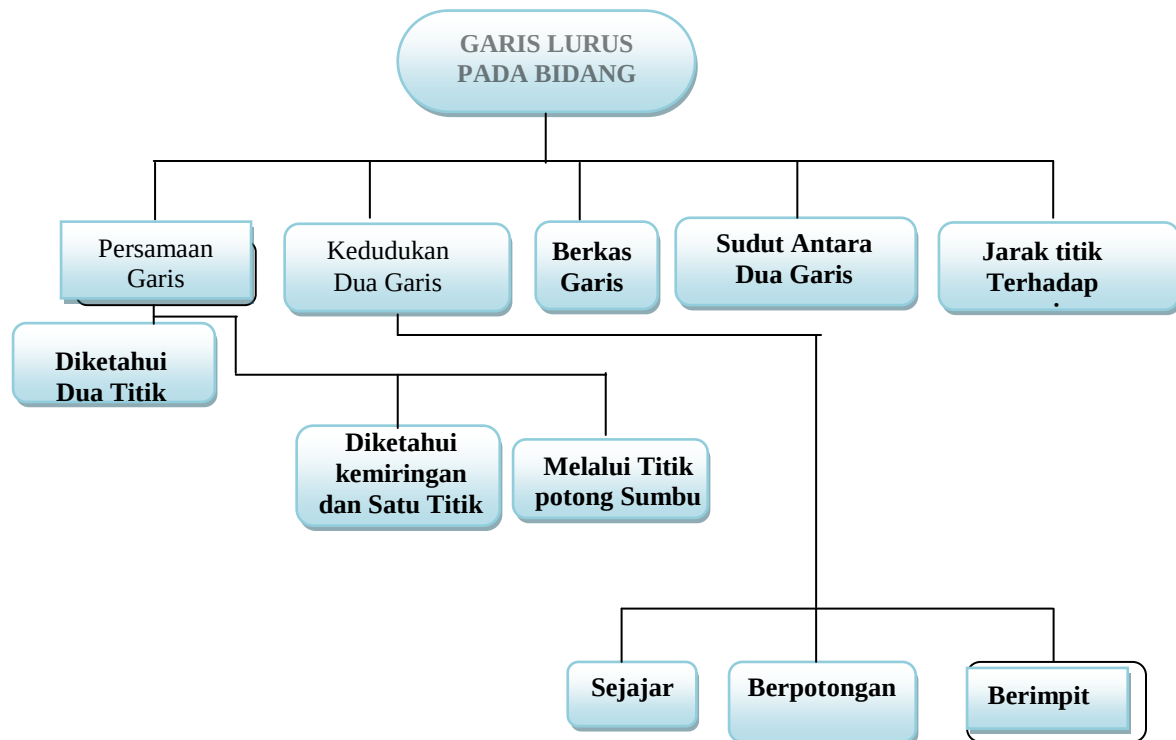
Konsep-konsep yang relevan yang akan diajarkan berdasarkan hasil analisis adalah sebagaimana pada tabel 5.1 di atas. Berdasarkan tabel tersebut, dibuat peta konsep untuk setiap pokok bahasan sebagaimana berikut ini.



Gambar 5.1. Peta Konsep Sistem Koordinat

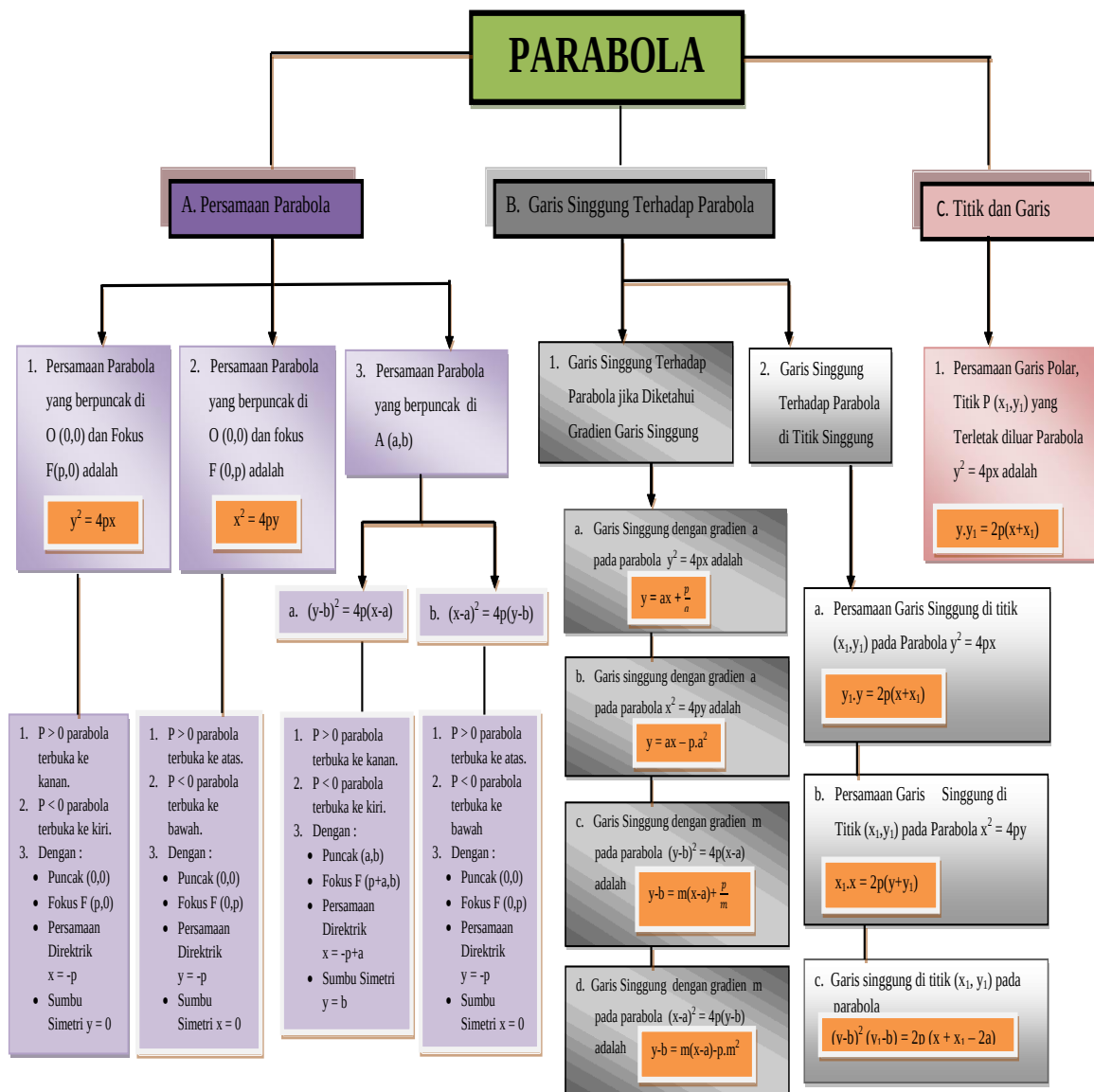


Gambar 5.2. Peta Konsep Vektor Pada Bidang

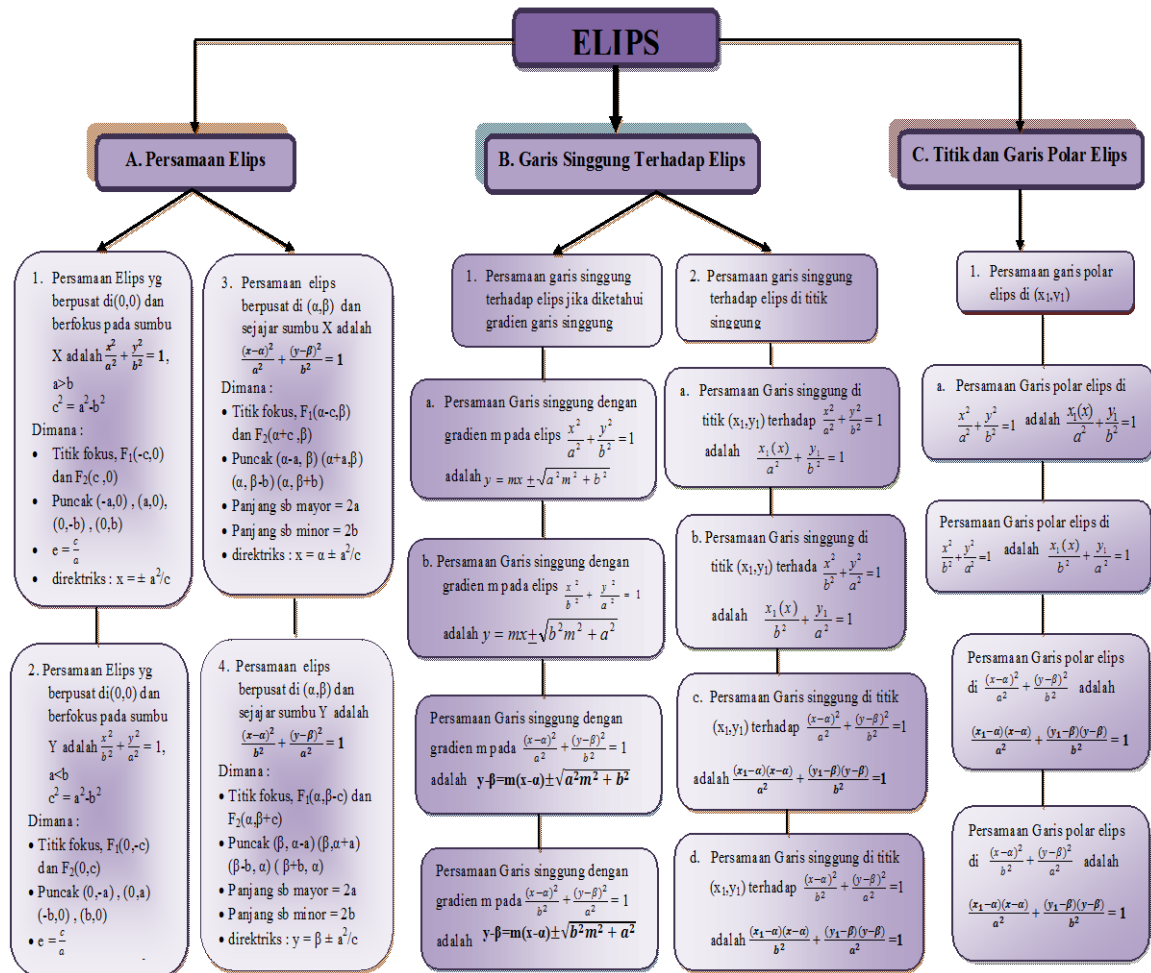


Gambar 5.3. Peta Konsep Garis Lurus Pada Bidang

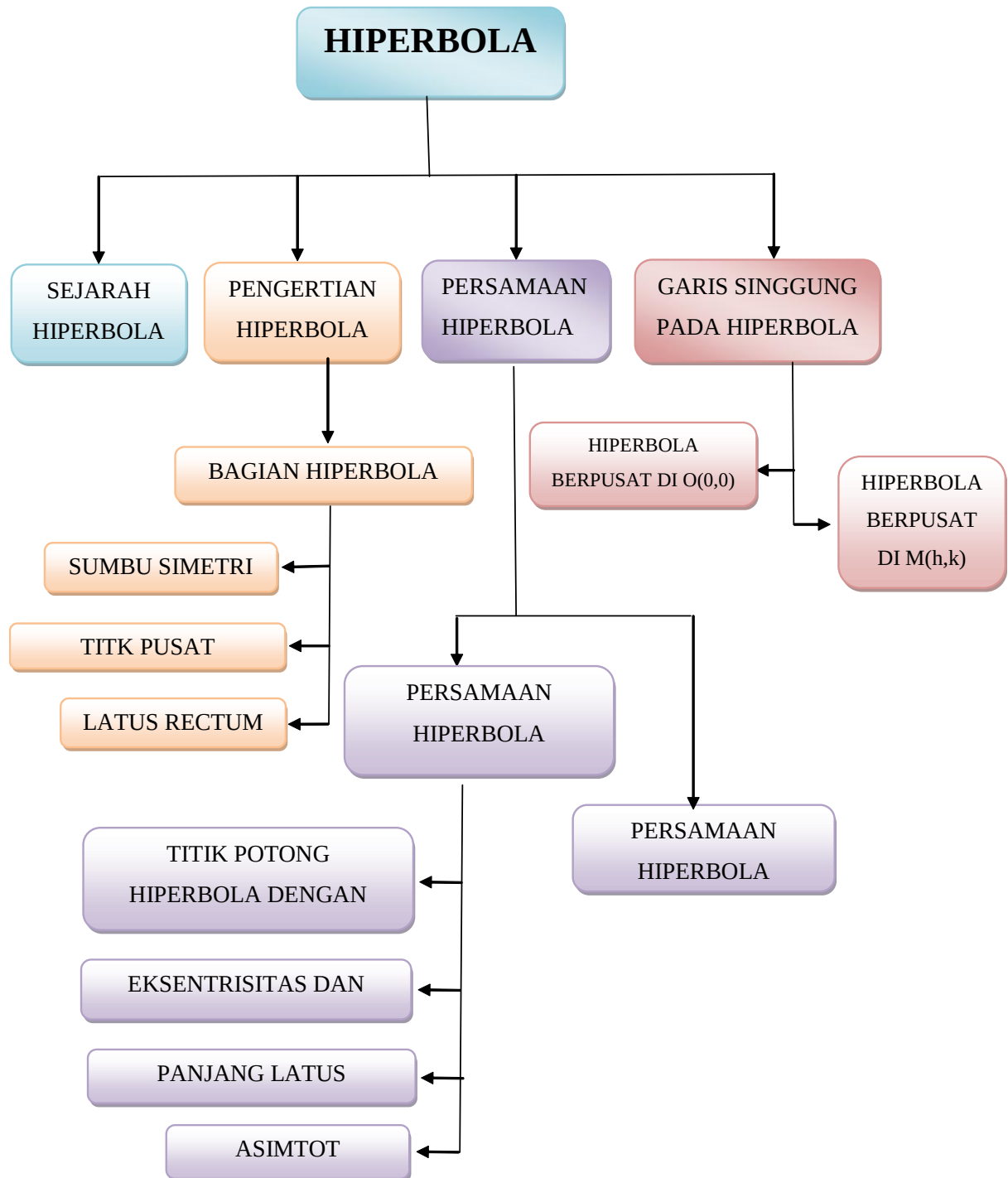




Gambar 5.5. Peta Konsep Parabola



Gambar 5.6. Peta Konsep Elips



Gambar 5.7. Peta Konsep Hiperbola

5.1.1.3. Analisis Tugas

Hasil identifikasi terhadap tugas/keterampilan-keterampilan utama yang dilakukan mahasiswa selama pembelajaran kemudian dianalisis ke dalam suatu kerangka sub keterampilan yang lebih spesifik.

Sesuai dengan bahan kajian yang dipilih yaitu Geometri Analitik Bidang I maka berdasarkan Silabus diperoleh capaian pembelajaran sebagaimana berikut.

S9: Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan bidang keahliannya secara mandiri.

P1: Menguasai konsep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan perencanaan, pengelolaan, implementasi, evaluasi, dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*).

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya;

KK1: Mampu menerapkan konsep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan perencanaan, pengelolaan, implementasi, evaluasi, dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*).

Analisis tugas juga dapat dilihat sebagaimana pada tabel 5.1 di atas.

Rangkaian indikator pencapaian hasil belajar itu selanjutnya menjadi tujuan pembelajaran yang merupakan dasar dalam menyusun rancangan bahan ajar. Sedangkan Rencana Pembelajaran Semester termasuk kegiatan pembelajaran dan bahan ajar dirancang agar muatannya sesuai dengan pengembangan karakter-karakter yang baik. Kegiatan pembelajaran dirancang bersifat memfasilitasi pengetahuan nilai-nilai moral, menyadari pentingnya nilai-nilai dan diinternalisasinya nilai-nilai karakter yang baik. Rencana Pembelajaran, satuan acara perkuliahan dan bahan ajar geometri analitik bidang datar dapat dilihat pada lampiran.

5.2. Luaran Yang Dicapai

Selama penelitian ini, luaran yang telah dicapai adalah Rencana Pembelajaran Semester (RPS) berbasis KKNI, desain kontrak perkuliahan, Satuan acara perkuliahan serta bahan ajar geometri analitik bidang datar beserta draft artikel ilmiah. Semuanya dapat dilihat pada lampiran.

Bahan ajar yang telah disusun adalah bahan ajar Sistem Koordinat. Sistem Koordinat terdiri dari Cartesius dan Sistem koordinat Khutub, bahan ajar vektor pada bidang, bahan ajar garis lurus pada bidang, bahan ajar lingkaran, bahan ajar elips, bahan ajar parabola dan bahan ajar hiperbola.

Bahan ajar-bahan ajar ini disusun secara kronologis, oleh topik atau berdasar peningkatan tahapan keterampilan atau kompleksitas. Bahan ajar memungkinkan mahasiswa dapat mempelajari suatu kompetensi secara runtut dan sistematis sehingga secara akumulatif mampu menguasai semua kompetensi secara utuh dan terpadu. Bahan ajar dikemas sedemikian rupa sehingga diharapkan mahasiswa akan memiliki ketertarikan terhadap matematika. Hal ini akan memotivasi mereka untuk tidak melewatkan konsep-konsep matematika.

Di bagian pembuka pada tiap bahan ajar, peneliti memasukkan peta konsep tiap bahasan dan matematikawan yang menjadi penemu tiap konsep yang dibahas.

Tujuan penyusunan peta konsep adalah agar mahasiswa dapat mengingat konsep-konsep juga keterkaitan antar konsep dalam geometri analitik bidang datar. Sedangkan tujuan dicantumkannya sejarah matematika agar mahasiswa memahami proses terbentuknya konsep yang sedang dibahas. Kaitannya dengan karakter adalah bahwa dengan mengetahui hal ini, mahasiswa akan lebih termotivasi dan lebih menyukai belajar matematika dan selalu berusaha keras memahami konsep-konsep dalam matematika.

Bahan ajar yang disusun merujuk pada kompetensi yang harus dicapai, sesuai dengan karakteristik sasaran dan tuntutan pemecahan masalah belajar. Dengan bahan ajar yang disusun diharapkan mahasiswa dapat belajar sesuai dengan kecepatan masing-masing bahkan dapat menjadi pembelajar yang mandiri.

Faktor lain yang diperhatikan adalah penggunaan bahasa, penggunaan ilustrasi atau contoh, serta penyajian. Agar pesan dapat dicerna dengan baik maka digunakan bahasa yang efektif, komunikatif dan dialogis. Sedangkan ilustrasi atau contoh yang tepat disertakan dengan tujuan mendukung penyampaian materi dengan lebih baik. Ilustrasi berupa gambar, skema, tabel yang dibuat sendiri untuk memperjelas pesan, memberi variasi dan membangkitkan motivasi.

Pada satuan acara perkuliahan, beberapa model, strategi dan pendekatan dicantumkan. Tetapi dosen harus tetap mempertimbangkan beberapa hal ketika akan memilih model, strategi maupun pendekatan tersebut. Setiap dosen dapat memilih dan mengembangkan model pembelajaran tersendiri yang khas dengan mempertimbangkan karakteristik mahasiswa termasuk kondisi psikhis mahasiswa, sifat materi yang akan dibahas atau diajarkan dan waktu pelaksanaan pembelajaran.

Pada satuan acara perkuliahan, dipertimbangkan juga pengetahuan, keterampilan dan sikap yang dibawa mahasiswa ke kelas. Termasuk pemikiran-pemikiran awal dan kesalahan persepsi yang mereka miliki.

Terdapat sepuluh karakter yang dituntut untuk dikembangkan pada pelaksanaan pembelajaran di kelas. Karakter-karakter ini tertulis pada satuan acara perkuliahan. Sepuluh karakter tersebut adalah kedisiplinan, penampilan, kesantunan, kemampuan bekerjasama, kemampuan berkomunikasi, komitmen, keteladanan, semangat, empati dan tanggung jawab. Pengembangan kriteria penilaian untuk sepuluh karakter ini diserahkan kepada dosen.

Pada satuan acara perkuliahan, beberapa model, pendekatan dan strategi yang berpengaruh kepada pembentukan karakter yang disebutkan di awal juga tercantum. Beberapa model, pendekatan atau strategi yang mempengaruhi pembentukan karakter adalah *Problem Based Instruction* (pembelajaran berdasarkan masalah), *Contextual teaching and learning*, Strategi MASTER berbantuan peta konsep, diskusi kelas, *cooperative learning* dan yang lainnya.

Problem Based Instruction adalah pendekatan yang efektif untuk pengajaran proses berfikir tingkat tinggi. Pembelajaran ini membantu peserta didik untuk memproses informasi yang sudah jadi dalam benaknya dan menyusun pengetahuan

mereka sendiri tentang dunia sosial dan sekitarnya. Bahkan Resnick (dalam Trianto) menyatakan bahwa model pembelajaran berdasarkan masalah amat penting untuk menjembatani gap antara pembelajaran di sekolah formal dengan aktivitas mental yang lebih praktis yang dijumpai di luar sekolah.

Ciri-ciri utama model ini adalah pengajuan pertanyaan atau masalah, memusatkan keterkaitan antardisiplin, penyelidikan autentik, kerjasama dan menghasilkan karya dan peragaan. Dengan ciri-ciri ini, pembelajaran dengan pendekatan PBI, aspek-aspek seperti keyakinan terhadap kemampuan diri sendiri, optimis, objektif, bertanggung jawab, rasional serta realistis dapat dikembangkan (Martyanti, 2013:15).

Strategi MASTER berbantuan peta konsep juga patut dipertimbangkan. Hasil penelitian tindakan kelas yang dilakukan oleh Panggabean (2015) menunjukkan bahwa keaktifan mahasiswa selama pembelajaran Geometri Analitik Bidang Datar dengan menerapkan Strategi MASTER berbantuan peta konsep menunjukkan adanya peningkatan tiap siklus. Mengembangkan peta konsep menuntut mahasiswa untuk mengidentifikasi dan mengorganisasikan informasi serta membangun hubungan antara bagian-bagian informasi. Mahasiswa juga membuat simpul yang menunjukkan suatu konsep dan konsep-konsep tersebut dihubungkan menggunakan garis, yang diberi label untuk menunjukkan hubungan antar konsep. Hal ini akan secara alami membantu mahasiswa memahami keterkaitan antar konsep. Bahkan mereka dapat melihat adanya hubungan yang lebih luas antar beberapa gagasan kemudian mempelajarinya sebagai sebuah kesatuan yang kohesif.

Contextual teaching and learning (CTL) yang konstruktivistik, juga adalah pendekatan pembelajaran yang sesuai untuk geometri analitik bidang datar. Dengan tujuh komponen utama, yaitu konstruktivisme, bertanya, inkuiri, masyarakat belajar, pemodelan dan penilaian autentik, pendekatan ini membantu mahasiswa mencari hubungan konsep-konsep matematika dengan situasi lingkungannya yang masuk akal dan bermanfaat. Alasan peneliti karena pengajaran kontekstual adalah pengajaran yang memungkinkan peserta didik menguatkan, memperluas, dan menerapkan pengetahuan dan ketrampilan akademik mereka dalam berbagai macam tatanan dalam dan luar kelas.

Selain elemen tersebut, karakteristik dari CTL adanya kerjasama, saling menunjang, menyenangkan, pembelajaran terintegrasi dan menggunakan berbagai sumber. Hal-hal ini akan menghasilkan dasar-dasar pengetahuan yang mendalam dimana mahasiswa kaya akan pemahaman masalah dan cara menyelesaikannya.

Pembelajaran dengan kooperatif juga mengajarkan nilai karakter dan akademik sekaligus. Strategi ini melibatkan mahasiswa bekerja secara berkolaborasi untuk mencapai tujuan bersama. Pembelajaran ini disusun dalam sebuah usaha untuk meningkatkan partisipasi mahasiswa, memfasilitasi mahasiswa dengan pengalaman sikap kepemimpinan dan membuat keputusan dalam kelompok, serta memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk berinteraksi dan belajar bersama-sama mahasiswa yang berbeda latar belakangnya.

Keuntungan yang lebih spesifik adalah (1) pembelajaran dengan kooperatif mengajarkan nilai-nilai kerjasama; (2) pembelajaran dengan kooperatif membangun komunitas di dalam kelas; (3) pembelajaran dengan kooperatif mengajarkan keterampilan dasar kehidupan yaitu bekerjasama untuk mencapai tujuan bersama; (4) pembelajaran dengan kooperatif memperbaiki pencapaian akademik, rasa percaya diri (Lickona, 2013: 276).

Pembelajaran model diskusi kelas merupakan pendekatan yang disarankan dalam satuan acara perkuliahan. Dua aspek diskusi kelas adalah kemampuan untuk mengembangkan pertumbuhan kognitif dan kemampuan untuk menghubungkan dan menyatukan aspek kognitif dan aspek sosial pembelajaran.

Diskusi merupakan situasi dimana mahasiswa dan dosen, atau antara mahasiswa dengan mahasiswa yang lain berbincang satu sama lain dan berbagi gagasan dan pendapat. Dosen akan memahami apa yang ada di dalam pemikiran mahasiswa dan bagaimana memproses gagasan dan informasi yang diajarkan melalui komunikasi yang terjadi selama pembelajaran berlangsung. Pertanyaan yang diajukan untuk merangsang diskusi adalah pertanyaan dengan tingkat kognitif tinggi. Jadi, Sistem diskusi merupakan sentral untuk menciptakan lingkungan belajar yang positif

BAB 6. KESIMPULAN DAN SARAN

6.1. KESIMPULAN

Pembelajaran yang mengintegrasikan karakter yang baik bekerja melalui isi materi dalam pembelajaran. Proses pengintegrasian karakter yang baik dimulai dengan tahap perencanaan. Perencanaan ini dapat terlihat dalam rencana pembelajaran semester, satuan acara perkuliahan dan bahan ajar yang akan digunakan di kelas, tahap pelaksanaan yaitu pada saat perkuliahan berlangsung dan tahap evaluasi.

Karena proses pengintegrasian karakter yang baik dapat berjalan efektif jika didukung oleh semua komponen-komponen belajar seperti, komponen input yaitu mahasiswa itu sendiri, komponen instrumental input yang berupa fasilitas yang menunjang dan komponen environmental input yaitu lingkungan maka pada penelitian selanjutnya, bahan ajar akan divalidasi oleh ahli sebelum digunakan pada ujicoba kelas kecil dan kelas yang sesungguhnya. Integrasi karakter-karakter yang baik dilakukan pada pelaksanaan pembelajaran.

6.2. SARAN

Mengintegrasikan karakter yang baik pada pembelajaran matematika perlu dilakukan secara serius dan terus menerus melalui suatu program yang terencana.

DAFTAR PUSTAKA

- Arends, Richard I. 1997. *Classroom Instruction and Management*. The McGraw-Hill Company: New York.
- Asyanti, Setia. 2012. *Pendidikan Karakter Di Perguruan Tinggi: Sudah Terlambatkah?* Surakarta: Fakultas Psikologi Universitas Muhammadiyah Surakarta tersedia <https://publikasiilmiah.ums.ac.id>
- Lickona, Thomas. 2014. *Educating For Character: How Our Schools Can Teach Respect and Responsibility*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Martyanti, Adhetia, 2013. Membangun *Self-Confidence* Siswa Dalam Pembelajaran Matematika Dengan Pendekatan Problem Solving. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNY 9 November 2013* Yogyakarta. Hal. 15- 22.
- Muslich, Masnur. 2014. *Pendidikan Karakter: Menjawab Tantangan Krisis Multidimensional*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Panggabean, Ellis Mardiana. 2015. *Meningkatkan Aktivitas Dan Hasil Belajar Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FKIP UMSU Pada Perkuliahan Geometri Analitik Bidang Melalui Strategi MASTER Berbantuan Peta Konsep*. Medan: LP2M UMSU.
- Salafudin. 2013. Pendidikan Karakter Melalui Pembelajaran Matematika. *Jurnal Penelitian* Vol. 10, No. 1, Mei 2013. Hlm. 63-76.
- Sijabat, Eva Yuliana. 2016. Character Building during the Learning Process of Mathematics for the second Grade of SMP Stella Duce 2. *Skripsi*. Yogyakarta: Sanata Darma University.
- Slavin, Robert. E. 2006. *Educational Psychology. Theory & Practise*. Edisi 8. A Divisin of Paramount Publishing, USA.
- Trianto. 2011. *Mendesain Model Pembelajaran Inovatif-Progresif*. Jakarta: Kencana.

LAMPIRAN 1

DRAFT ARTIKEL ILMIAH**Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Yang Baik
Pada Pembelajaran Matematika****Ellis Mardiana Panggabean¹⁾ Mariani Nasution²⁾ Nur' Afifah³⁾****1) Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, UMSU****email: ellismardiana@umsu.ac.id****2) Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, UMSU****email: marianinasution@gmail.com****3) Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, UMSU****email: Nurafifah@gmail.com****Abstract**

Tujuan umum dari penelitian ini mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik pada pembelajaran matematika. Diawali dengan mengembangkan bahan ajar geometri analitik bidang datar. Bahan ajar dirancang agar muatannya sesuai dengan pengembangan karakter. Kegiatan pembelajaran yang dimasukkan pada satuan acara perkuliahan dirancang bersifat memfasilitasi pengetahuan nilai-nilai moral, menyadari pentingnya nilai-nilai dan diinternalisasinya nilai-nilai karakter yang baik. Pengembangan yang dilakukan mengacu pada model 4-D yang dimodifikasi yaitu define, design dan develop.

Kata Kunci: Integrasi, nilai-nilai karakter yang baik, pembelajaran matematika

1. Pendahuluan

Pembentukan karakter yang baik dan berkualitas perlu dilakukan secara sistematis dan berkesinambungan mulai dari taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi. Untuk itu, pembentukan karakter harus menjadi bagian terpadu dari pendidikan. Sebagaimana yang dinyatakan oleh Firdaus Syam bahwa "Pembangunan karakter ingin mengembalikan paradigma berfikir. Agar mahasiswa tidak hanya pintar, berpengetahuan dan unggul, tetapi juga bertanggung jawab dan beretika. Tantangan ini harus mampu dijawab oleh pihak kampus manapun" (2015).

Penekanan pada pembangunan karakter dalam pendidikan juga jelas dinyatakan dalam deskripsi Kerangka Kurikulum Nasional Indonesia (KKNI) bahwa "Sesuai dengan ideologi Negara dan budaya Bangsa Indonesia, maka implementasi sistem pendidikan nasional yang dilakukan di Indonesia pada setiap level kualifikasi mencakup proses yang menumbuhkembangkan afeksi antara lain memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik dalam menyelesaikan tugasnya, mampu bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial dan kepedulian yang tinggi terhadap masyarakat dan lingkungannya, menghargai keanekaragaman budaya, pandangan, kepercayaan, dan agama serta pendapat/temuan orisinal orang lain, dst." Demikian halnya di dalam tujuan pendidikan matematika yaitu "memberi tekanan pada nalar, dasar, dan pembentukan karakter siswa serta juga memberi tekanan pada ketrampilan dalam penerapan matematika".

Pentingnya menanamkan karakter kepada peserta didik juga dinyatakan oleh budayawan Frans Magnis Suseno (dalam Muslich, 2014) bahwa "Untuk membangun karakter peserta didik, mesti didukung dengan inisiatif kritis dan memberikan waktu pada mereka yang mengemukakan ide-ide

baru". Senada dengan itu, Lickona (2014) menyatakan "Peranan sekolah sebagai tempat pendidikan moral menjadi semakin penting ketika jutaan anak-anak hanya mendapatkan sedikit pendidikan moral dari orangtua mereka dan ketika makna nilai yang sangat berpengaruh yang didapatkan melalui tempat ibadah lainnya perlahan tidak berarti dan menghilang dari kehidupan mereka". Pada masa ini, ketika sekolah tidak memberikan pendidikan moral, pengaruh kekerasan terhadap karakter anak-anak begitu cepat masuk dan membuat nilai-nilai yang berlaku menjadi vakum". Dalam bagian lain dinyatakan bahwa " pendidikan nilai merupakan sebuah pekerjaan yang sangat mungkin dilaksanakan".

Mengingat Perguruan Tinggi memiliki pilihan dalam mengajarkan pembentukan karakter yaitu dapat mengintegrasikannya secara alami dengan kurikulum standar atau mengajarkan beriringan dengan kurikulum standar. Daripada menambahkan serangkaian pertemuan terpisah pada kurikulum yang sesungguhnya sudah padat, pilihan yang mudah adalah mengintegrasikan pendidikan karakter dengan mata pelajaran/mata kuliah pada semua kelas oleh semua pendidik (Stiff-William dalam Asyanti, 2012)

Sebagai lembaga yang mencetak tenaga-tenaga kependidikan, program pendidikan matematika FKIP UMSU perlu mempersiapkan guru-guru matematika abad ke 21 yang tidak hanya siap menyelesaikan kurikulum (aspek kognitif), tetapi juga yang berkarakter. Sehingga nantinya, mampu membentuk karakter generasi penerus yang dapat menghadapi tantangan masa depan yang serba cepat, terus berubah dan dinamis.

Dari nilai-nilai yang dikembangkan di atas, terdapat sepuluh karakter yang dituntut untuk dikembangkan pada pembelajaran. Sepuluh karakter tersebut adalah kedisiplinan, penampilan, kesantunan, kemampuan bekerjasama, kemampuan berkomunikasi, komitmen, keteladanan, semangat, empati dan tanggung jawab. Jadi tujuan penelitian ini adalah mengintegrasikan nilai-nilai karakter yang baik pada pembelajaran matematika yang diawali dengan mengembangkan bahan ajar geometri analitik bidang datar.

II. Kajian Teoritis

II.1. Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran Matematika

Aristoteles (dalam Lickona, 2014: 81) mendefinisikan karakter yang baik sebagai kehidupan dengan melakukan tindakan-tindakan yang benar sehubungan dengan diri seseorang dan orang lain. Kehidupan yang berbudi luhur termasuk kebaikan yang berorientasi pada diri sendiri (seperti kontrol diri dan moderasi) sebagaimana halnya dengan kebaikan yang berorientasi pada hal lainnya (seperti kemurahan hati dan belas kasihan), dan kedua jenis kebaikan ini berhubungan. Sedangkan Koesoema (dalam Muslich, 2014) menyatakan karakter sebagai "kepribadian yang merupakan ciri atau karakteristik dari diri seseorang yang bersumber dari bentukan-bentukan yang diterima dari lingkungan". Dalam bagian yang sama, Winnie menyatakan ada dua pengertian karakter. Pertama, ia menunjukkan bagaimana seseorang bertingkah laku. Kedua, berkaitan dengan "personality". Seseorang disebut berkarakter apabila tingkah lakunya sesuai dengan kaidah moral.

Jadi, karakter adalah cara bertingkah laku yang merupakan bentukan dari lingkungan. Lingkungan ini, misalnya keluarga, sekolah dan masyarakat.

Karakter terdiri dari nilai operatif, nilai dalam tindakan. Kita berproses dalam karakter kita, seiring suatu nilai menjadi suatu kebaikan, suatu disposisi batin yang dapat diandalkan untuk menanggapi situasi dengan cara yang menurut moral itu baik.

Karakter memiliki tiga bagian yang saling berhubungan yaitu pengetahuan moral, perasaan moral dan perilaku moral. Karakter yang baik terdiri dari mengetahui hal yang baik, menginginkan hal yang baik dan melakukan hal yang baik-kebiasaan dalam cara berpikir, kebiasaan dalam hati, dan

kebiasaan dalam tindakan. Ketiga hal ini diperlukan untuk mengarahkan suatu kehidupan moral; ketiganya ini membentuk kedewasaan moral.

II. 2. Nilai-Nilai yang Terdapat di dalam Matematika

Jika ditelusuri maka di dalam matematika terdapat tiga macam nilai utama yaitu nilai praktis, nilai-nilai disiplin dan nilai budaya. Pengetahuan dasar tentang matematika serta ketrampilan menggunakannya merupakan kebutuhan. Hal ini bisa dilihat dalam kehidupan sehari-hari. Untuk mempelajari bidang lainnyapun, bantuan matematika amat diperlukan.

Matematika merupakan salah satu sarana untuk menanamkan kebiasaan menalar dalam jiwa. Matematika juga ilmu yang eksak, benar dan senantiasa langsung menuju sasaran. Karena itu dapat menumbuhkan disiplin dalam jiwa. Untuk menyatakan kebenaran atau kesalahan pernyataan harus mempunyai alasan yang tepat. Penalaran matematika amat baik dan cocok untuk melatih jiwa peserta didik akan kesederhanaan, ketepatan hasil, keaslian/originalitas, memeriksa dan menguji hasil.

Matematika diciptakan karena desakan kebutuhan dan untuk mempermudah pemecahan masalah yang dihadapi. Nilai-nilai sehubungan dengan nilai budaya adalah pengembangan daya konsentrasi, sifat ekonomis, kemampuan mengeluarkan pendapat, percaya kepada diri sendiri, hasrat untuk menemukan, hasrat untuk belajar dan membaca serta kemampuan bekerja keras.

Jadi, pembelajaran matematika memberikan sumbangan yang penting dalam pengembangan karakter-karakter yang baik. Nilai karakter yang dapat dikembangkan melalui pembelajaran matematika adalah rasa hormat, disiplin, jujur, kerja keras, kreatif, rasa ingin tahu, mandiri, komunikatif, tanggung jawab dan kerendahan hati.

II.3 Pengembangan Bahan Ajar

Tujuan penyusunan bahan ajar adalah: (1) menyediakan bahan ajar yang sesuai dengan tuntutan kurikulum dengan mempertimbangkan kebutuhan peserta didik, yakni bahan ajar yang sesuai dengan karakteristik dan setting atau lingkungan sosial peserta didik; (2) Membantu peserta didik dalam memperoleh alternatif bahan ajar disamping buku-buku teks yang terkadang sulit diperoleh dan (3) Memudahkan dalam melaksanakan pembelajaran.

Prinsip-prinsip yang perlu diperhatikan dalam pengembangan materi pembelajaran meliputi prinsip relevansi, konsistensi, dan adekuasi/kecukupan. Prinsip relevansi (keterkaitan) mengisyaratkan materi pembelajaran hendaknya relevan atau ada kaitan atau ada hubungannya dengan pencapaian standar kompetensi, kompetensi dasar dan standar isi. Prinsip konsistensi artinya keajegan. Jika kompetensi dasar yang harus dikuasai mahasiswa satu macam, maka materi pembelajaran yang harus diajarkan juga harus meliputi satu macam. Prinsip kecukupan terkait dengan cakupan dan urutan materi pembelajaran.

Masalah cakupan atau ruang lingkup, kedalaman, dan urutan penyampaian materi pembelajaran penting diperhatikan. Ketepatan dalam menentukan cakupan, ruang lingkup, dan kedalaman materi pembelajaran akan menghindarkan dosen mengajarkan terlalu sedikit atau terlalu banyak, terlalu dangkal atau terlalu mendalam. Sedangkan ketepatan urutan penyajian (sequencing) akan memudahkan bagi peserta didik mempelajari materi pembelajaran.

Dalam menentukan cakupan materi pembelajaran, prinsip-prinsip yang perlu diperhatikan menyangkut keluasan materi dan kedalaman materi. Keluasan materi menggambarkan berapa banyak materi-materi yang dimasukkan ke dalam pembelajaran. Sedangkan kedalaman materi adalah seberapa detail konsep-konsep yang harus dipelajari/dikuasai oleh peserta didik.

Materi pembelajaran yang sudah ditentukan ruang lingkup serta kedalamannya dapat diurutkan

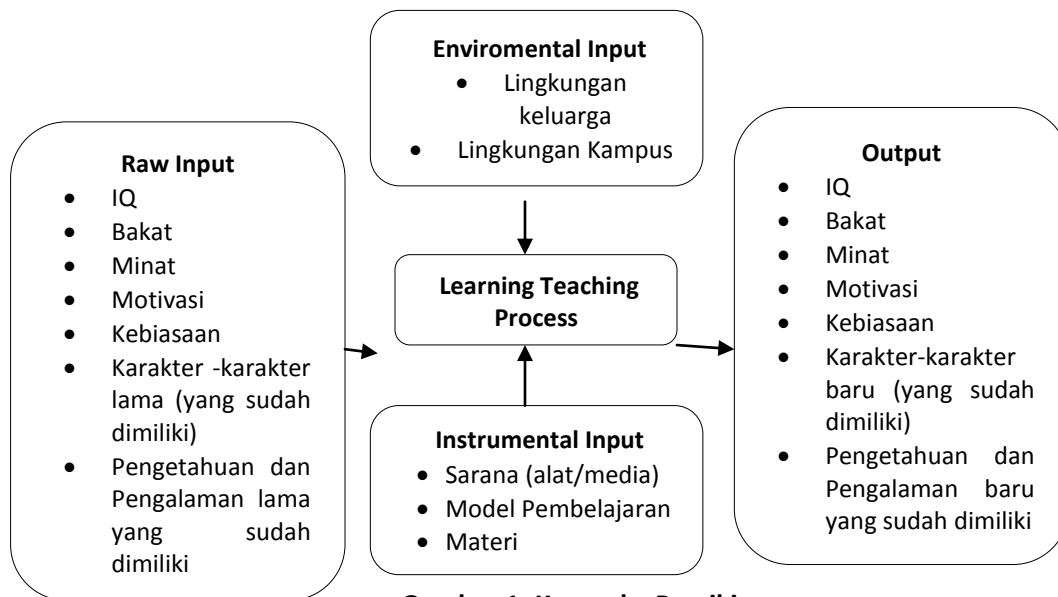
melalui dua pendekatan pokok, yaitu: pendekatan prosedural, dan hierarkis. Urutan materi pembelajaran secara prosedural menggambarkan langkah-langkah secara urut sesuai dengan langkah-langkah melaksanakan suatu tugas. Sementara urutan materi pembelajaran secara hierarkis menggambarkan urutan yang berjenjang dari mudah ke sulit, atau dari yang sederhana ke yang kompleks. Pada penelitian ini, penyusunan bahan ajar menggunakan model penataan informasi dengan memperhatikan prinsip relevansi, konsistensi, dan adekuasi/kecukupan.

II.4. Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Pada Pembelajaran Matematika

Mengintegrasikan nilai-nilai karakter ke dalam pembelajaran matematika dalam hal ini geometri analitik bidang datar, dimulai dari perencanaan, pelaksanaan hingga kepada evaluasi pembelajaran. Integrasi tersebut tampak pada pelaksanaan pembelajaran di kelas. Integrasi dapat dilakukan dengan mengadopsi beberapa model pembelajaran dengan tetap mempertimbangkan sifat materi geometri analitik datar yang dibahas, karakteristik mahasiswa dan kondisi psikis mahasiswa pada saat pembelajaran berlangsung serta waktu dilaksanakannya pembelajaran.

Pada perencanaan pembelajaran, Rencana Pembelajaran Semester (RPS), satuan acara perkuliahan termasuk kegiatan pembelajaran dan bahan ajar dirancang agar muatannya sesuai dengan pengembangan karakter. Kegiatan pembelajaran yang dirancang bersifat memfasilitasi pengetahuan nilai-nilai moral, menyadari pentingnya nilai-nilai dan diinternalisasinya nilai-nilai.

Pengembangan nilai-nilai karakter yang baik bisa berjalan efektif jika didukung oleh komponen-komponen yang ada. Komponen tersebut adalah mahasiswa (*raw input*), proses pembelajaran (*learning teaching process*), sarana dan prasarana (*instrumental input*) serta lingkungan (*enviromental input*) sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut" (Sijabat, 2016)



Gambar 1. Kerangka Pemikiran

Komponen-komponen di atas diolah dalam proses pembelajaran sehingga menghasilkan *output* (mahasiswa) yang mempunyai karakter yang baik. Nilai-nilai karakter yang muncul sebagaimana yang dinyatakan oleh Kemendiknas yaitu religius, kejujuran, toleransi, disiplin, demokratis, teliti, kerja keras, kreatif, rasa ingin tahu, dan tanggung jawab.

III. Metode Penelitian

Jenis penelitian adalah penelitian pengembangan. Perangkat pembelajaran yang dikembangkan pada tahun I, meliputi RPS (Rencana Perkuliahan Semester), Satuan Acara Perkuliahan dan Bahan Ajar Geometri Analitik Bidang. Model pengembangan yang digunakan mengacu pada model 4-D yang dimodifikasi terdiri dari tahap define, design dan develop.

Pada tahap mendefinisikan, kegiatan terfokus pada analisis terhadap situasi yang dihadapi dosen, karakteristik mahasiswa, konsep-konsep yang diajarkan dan diakhiri dengan perumusan tujuan pembelajaran. Tujuan tahap ini untuk menetapkan dan mendefinisikan syarat-syarat pembuatan pembelajaran dengan menganalisis tujuan dan batasan materi pembelajaran.

Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini adalah dokumentasi, memperoleh informasi yang berkaitan dengan integrasi nilai-nilai karakter yang baik pada pembelajaran matematika dan observasi (pengamatan), memperoleh informasi yang berkaitan dengan kualitas pelaksanaan kegiatan belajar mengajar dan karakteristik mahasiswa.

Teknik analisis data dilakukan dalam tiga tahap yaitu tahap reduksi data, tahap penyajian data dan tahap penarikan kesimpulan. Kegiatan pada tahap reduksi data meliputi proses menyeleksi, memfokuskan, mengabstraksikan dan memformulasikan semua data yang diperoleh dari lapangan. Tahap penyajian data meliputi kegiatan menuliskan kumpulan data yang tersusun/terorganisasi berkaitan dengan pertanyaan penelitian sehingga memungkinkan untuk menarik kesimpulan dari data yang telah dikumpulkan. Sedangkan penarikan kesimpulan dilakukan berdasarkan pada reduksi data dan sajian data yang merupakan jawaban atas masalah penelitian.

IV. HASIL DAN LUARAN YANG DICAPAI

Kegiatan analisis yang telah dilalui pada tahap ini adalah analisis awal akhir, analisis mahasiswa, analisis tugas, analisis konsep dan penetapan tujuan pembelajaran.

Pada tahap analisis awal akhir ini dilakukan analisis kurikulum, teori belajar yang relevan dan tantangan serta tuntutan masa depan agar mahasiswa yang dihasilkan mempunyai karakter yang baik. Dengan demikian diperoleh deskripsi pola pembelajaran yang dianggap paling sesuai.

Hasil analisis terhadap kurikulum pendidikan matematika UMSU, diperoleh mata kuliah geometri analitik bidang datar ini adalah dasar untuk memprogram mata kuliah geometri analitik ruang, matematika sekolah menengah dan kalkulus lanjut pada semester berikutnya. Oleh karena itu, perlu penekanan yang kuat terhadap pentingnya materi pada mata kuliah ini sebagai landasan untuk mempelajari mata kuliah-matakuliah tersebut. Sebagai contoh, garis pada bidang akan mendasari garis pada ruang, vektor pada bidang akan mendasari vektor pada ruang, lingkaran akan mendasari bola, parabola akan mendasari paraboloida, elips akan mendasari elipsoida, hiperbola akan mendasari hiperboloida.

Analisis terhadap kurikulum sekolah menengah terkait dengan geometri analitik bidang datar juga dilakukan. Hasil pendalaman terhadap materi sekolah menengah, pertama materi yang terkait adalah letak titik pada bidang koordinat kartesius dan koordinat kutub, vektor pada bidang, garis pada bidang, lingkaran, parabola, elips dan hiperbola. Kedalaman pembahasan pada materi lingkaran, parabola, elips dan hiperbola hanya sampai kepada garis singgung pada tempat-tempat kedudukan tersebut.

Pada bahan ajar yang telah disusun, disamping mengakomodasi materi-materi sekolah menengah yang terkait dengan geometri analitik bidang datar di atas, juga mempertimbangkan bahwa mata kuliah ini adalah dasar untuk mendalami mata kuliah geometri analitik ruang, kalkulus dan matematika sekolah menengah. Sehingga kedalaman materi juga sangat diperhatikan. Sebagai contoh, materi lingkaran sampai kepada pembahasan berkas lingkaran. Sedangkan pada parabola, elips dan

hiperbola, pembahasan sampai kepada titik dan garis polar terhadap parabola, elips dan hiperbola. Bahkan pada bahan ajar hiperbola, pembahasan sampai kepada hiperbola-hiperbola sekawan. Jadi, berdasarkan analisis kurikulum, materi geometri analitik bidang datar adalah sebagaimana pada tabel 5.1 berikut ini.

Tabel 1. Capaian Mata Kuliah dan Indikator Geometri Analitik Bidang

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CP)	Indikator
Materi: Sistem Koordinat 1. Menentukan letak titik pada bidang koordinat. 2. Menghitung jarak antara dua titik yang ditentukan. 3. Menentukan koordinat titik pada garis yang melalui dua titik yang ditentukan 4. Menentukan letak titik pada koordinat kutub. Materi: Vektor Pada Bidang 1. Menentukan vektor letak. 2. Menentukan hasil kali skalar dua vektor. 3. Menentukan persamaan vector suatu garis lurus. Materi: Persamaan Garis Lurus 1. Menyusun persamaan garis lurus. 2. Mengidentifikasi kedudukan dua garis lurus. 3. Menghitung jarak titik dan garis. 4. Menentukan sudut antara dua garis. 5. Menentukan titik potong dua garis. 6. Menentukan persamaan berkas garis. Materi: Lingkaran 1. Menyusun persamaan lingkaran. 2. Menentukan garis singgung pada lingkaran. 3. Menyusun garis kutub. 4. Menentukan kuasa suatu titik pada lingkaran. 5. Menyusun garis kuasa. 6. Menentukan titik kuasa. 7. Mengidentifikasi Kedudukan Dua Lingkaran.	• Ketepatan menggambarkan titik pada bidang koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub. • Ketepatan menghitung jarak dua titik. • Ketepatan menentukan letak titik pada bidang koordinat khutub. • Ketepatan menentukan persamaan vektor suatu garis lurus. • Ketepatan merumuskan persamaan garis lurus • Ketepatan mengidentifikasi kedudukan dua garis. • Ketepatan menghitung jarak titik dan garis • Ketepatan menentukan sudut antara dua garis • Ketepatan menentukan titik potong dua garis • Ketepatan menyusun persamaan lingkaran, • Ketepatan menentukan garis singgung pada lingkaran, kuasa suatu titik pada lingkaran, garis kutub, titik kuasa dan garis kuasa. • Ketepatan mengidentifikasi kedudukan dua lingkaran • Ketepatan menyusun persamaan elips

Materi: Elips 1. Menyusun persamaan elips. 2. Membuat sketsa grafik elips. 3. Menentukan garis singgung pada elips. 4. Menentukan Titik dan Garis Polar Materi: Parabola 1. Menyusun persamaan parabola 2. Membuat sketsa grafik parabola 3. Menentukan garis singgung pada parabol. 4. Titik dan Garis Polar Materi: Hiperbola 1. Menyusun persamaan hiperbul. 2. Menggambarkan hiperbula. 3. Menentukan garis singgung pada hiperbul. 4. Menentukan Titik dan Garis Polar 5. Menentukan hiperbola-hiperbola sekawan.	• Ketepatan membuat sketsa elips • Ketepatan menyusun garis singgung pada elips • Ketepatan menentukan titik dan garis polar terhadap suatu elips. • Ketepatan menyusun persamaan parabola • Ketepatan membuat sketsa grafik parabola • Ketepatan menentukan garis singgung pada parabola, • Ketepatan menentukan titik dan garis polar terhadap suatu parabola. • Ketepatan menyusun persamaan hiperbola. • Ketepatan menggambarkan hiperbola. • Ketepatan menentukan persamaan garis singgung pada hiperbola • Ketepatan menentukan titik dan garis polar terhadap suatu hiperbola, • Ketepatan menentuka hiperbola-hiperbola sekawan.
---	---

Analisis terhadap karakteristik mahasiswa dilakukan dengan observasi terhadap mahasiswa yang memprogram matakuliah geometri analitik datar pada semester genap tahun akademik 2016/2017. Observasi dilakukan selama satu semester. Hasil analisis karakteristik mahasiswa adalah: a) Latar belakang pemahaman terhadap konsep-konsep geometri analitik bidang datar sangat rendah; b) Setelah mengikuti perkuliahan selama tujuh kali pertemuan, pergerakan pemahaman tidak seperti yang diharapkan. Hal ini tampak pada ujian tengah semester dimana nilai sebagian besar mahasiswa berada di bawah 60; c) Kecenderungan untuk mengikuti penyelesaian pada contoh lebih besar daripada usaha untuk mencoba menyelesaikan dengan cara sendiri, soal-soal yang diberikan dalam perkuliahan geometri analitik. Jadi, mahasiswa cenderung kurang termotivasi untuk kreatif; d) Pada waktu presentasi, hanya sebagian kecil dari mahasiswa yang berusaha menguasai materi geometri analitik bidang datar yang ditugaskan kepada kelompoknya; e) Kemampuan mahasiswa dalam menggambarkan grafik elips, parabola dan hiperbola sangat kurang. Terutama jika pusat tempat-tempat kedudukan tersebut bukan pada titik asal; f. Kemampuan membuktikan teorema dalam geometri analitik bidang datar sangat kurang.

Hasil observasi terhadap karakteristik mahasiswa ini sesuai dengan hasil penelitian tindakan kelas yang sebelumnya dilakukan oleh Panggabean (2015). Pada siklus I dengan bahasan Garis Pada Bidang, ditemukan bahwa "Sebahagian besar mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam memahami materi perkuliahan. Kesulitan tersebut tampak dari kesalahan-kesalahan mahasiswa dalam menjawab tes hasil belajar tersebut. Kesalahan-kesalahan tersebut lalu diidentifikasi dan hasilnya adalah sebagai berikut.

- Salah dalam menentukan titik-titik potong terhadap sumbu X dan sumbu Y, akibatnya salah dalam menggambar grafik garis lurus pada bidang koordinat.
- Dapat menentukan titik-titik potong tetapi salah dalam meletakkan titik-titik tersebut pada bidang koordinat.
- Sebagian mahasiswa dapat menentukan titik potong garis terhadap salah satu sumbu X atau Y tetapi tidak keduanya. Dalam hal ini mahasiswa lupa teorema yang menyatakan "dari dua titik dapat dibuat satu garis".
- Salah dalam menentukan gradien garis lurus. Akibatnya salah dalam menghitung sudut yang dibentuk oleh dua garis lurus.
- Dapat menentukan gradien garis tetapi salah dalam prosedur menentukan sudut yang dibentuk oleh dua garis.
- Salah dalam prosedur menentukan jarak titik terhadap garis.
- Benar dalam prosedur menentukan jarak titik terhadap garis tetapi hasil akhir bernilai negatif.
- Salah dalam menulis persamaan berkas garis.

Demikian juga pada siklus II. Temuannya, beberapa mahasiswa masih mengalami kesulitan memahami materi lingkaran. Hal ini ditunjukkan oleh kesalahan-kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa dalam menyelesaikan tes hasil belajar, yaitu:

- Dalam menentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik, mahasiswa dapat menulis 3 persamaan dengan 3 bilangan yang tidak diketahui tetapi tidak dapat menyelesaikan sistem persamaan linier tersebut.
- Salah dalam menentukan jari-jari dan pusat lingkaran.
- Salah dalam menentukan persamaan garis singgung yang sejajar sumbu Y, sejajar sumbu X dan persamaan garis singgung yang di sebuah titik yang ditentukan..

Berdasarkan hasil analisis karakteristik mahasiswa dan hasil penelitian tersebut di atas, untuk memfasilitasi dan memperbaiki kemampuan mahasiswa dalam memahami suatu konsep, menggambarkan grafik irisan kerucut, membuktikan teorema dan terintegrasi penanaman karakter yang baik maka disusunlah bahan ajar geometri analitik bidang datar sesudah menyusun rencana pembelajaran semester, satuan acara perkuliahan. Penyusunan dilakukan sesudah menganalisa konsep dan analisis tugas yang harus dilakukan oleh mahasiswa.

Konsep-konsep yang relevan yang akan diajarkan berdasarkan hasil analisis adalah sebagaimana pada tabel 5.1 di atas. Berdasarkan tabel tersebut, dibuat peta konsep untuk setiap pokok bahasan.

Hasil identifikasi terhadap tugas/keterampilan-keterampilan utama yang dilakukan mahasiswa selama pembelajaran kemudian dianalisis ke dalam suatu kerangka sub keterampilan yang lebih spesifik. Sesuai dengan bahan kajian yang dipilih yaitu Geometri Analitik Bidang I maka berdasarkan Silabus diperoleh capaian pembelajaran sebagaimana berikut.

S9: Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan bidang keahliannya secara mandiri.

P1: Menguasai konsep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan perencanaan, pengelolaan, implementasi, evaluasi, dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*).

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya;

KK1: Mampu menerapkan konsep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan perencanaan, pengelolaan, implementasi, evaluasi, dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*).

Analisis tugas juga dapat dilihat sebagaimana pada tabel 5.1 di atas.

Rangkaian indikator pencapaian hasil belajar itu selanjutnya menjadi tujuan pembelajaran yang merupakan dasar dalam menyusun rancangan bahan ajar. Sedangkan Rencana Pembelajaran Semester termasuk kegiatan pembelajaran dan bahan ajar dirancang agar muatannya sesuai dengan pengembangan karakter-karakter yang baik. Kegiatan pembelajaran dirancang bersifat memfasilitasi pengetahuan nilai-nilai moral, menyadari pentingnya nilai-nilai dan diinternalisasinya nilai-nilai karakter yang baik. Rencana Pembelajaran, satuan acara perkuliahan dan bahan ajar geometri analitik bidang datar dapat dilihat pada lampiran.

Selama penelitian ini, luaran yang telah dicapai adalah Rencana Pembelajaran Semester (RPS) berbasis KKNI, desain kontrak perkuliahan, Satuan acara perkuliahan serta bahan ajar geometri analitik bidang datar beserta draft artikel ilmiah. Semuanya dapat dilihat pada lampiran.

Bahan ajar yang telah disusun adalah bahan ajar Sistem Koordinat. Sistem Koordinat terdiri dari Cartesius dan Sistem koordinat Khutub, bahan ajar vektor pada bidang, bahan ajar garis lurus pada bidang, bahan ajar lingkaran, bahan ajar elips, bahan ajar parabola dan bahan ajar hiperbola.

Bahan ajar-bahan ajar ini disusun secara kronologis, oleh topik atau berdasar peningkatan tahapan keterampilan atau kompleksitas. Bahan ajar memungkinkan mahasiswa dapat mempelajari suatu kompetensi secara runtut dan sistematis sehingga secara akumulatif mampu menguasai semua kompetensi secara utuh dan terpadu. Bahan ajar dikemas sedemikian rupa sehingga diharapkan mahasiswa akan memiliki ketertarikan terhadap matematika. Hal ini akan memotivasi mereka untuk tidak melewatkan konsep-konsep matematika.

Di bagian pembuka pada tiap bahan ajar, peneliti memasukkan peta konsep tiap bahasan dan matematikawan yang menjadi penemu tiap konsep yang dibahas.

Tujuan penyusunan peta konsep adalah agar mahasiswa dapat mengingat konsep-konsep juga keterkaitan antar konsep dalam geometri analitik bidang datar. Sedangkan tujuan dicantumkannya sejarah matematika agar mahasiswa memahami proses terbentuknya konsep yang sedang dibahas. Kaitannya dengan karakter adalah bahwa dengan mengetahui hal ini, mahasiswa akan lebih termotivasi dan lebih menyukai belajar matematika dan selalu berusaha keras memahami konsep-konsep dalam matematika.

Bahan ajar yang disusun merujuk pada kompetensi yang harus dicapai, sesuai dengan karakteristik sasaran dan tuntutan pemecahan masalah belajar. Dengan bahan ajar yang disusun diharapkan mahasiswa dapat belajar sesuai dengan kecepatan masing-masing bahkan dapat menjadi pembelajar yang mandiri.

Faktor lain yang diperhatikan adalah penggunaan bahasa, penggunaan ilustrasi atau contoh, serta penyajian. Agar pesan dapat dicerna dengan baik maka digunakan bahasa yang efektif, komunikatif dan dialogis. Sedangkan ilustrasi atau contoh yang tepat disertakan dengan tujuan mendukung penyampaian materi dengan lebih baik. Ilustrasi berupa gambar, skema, tabel yang dibuat sendiri untuk memperjelas pesan, memberi variasi dan membangkitkan motivasi.

Pada satuan acara perkuliahan, beberapa model, strategi dan pendekatan dicantumkan. Tetapi dosen harus tetap mempertimbangkan beberapa hal ketika akan memilih model, strategi maupun pendekatan tersebut. Setiap dosen dapat memilih dan mengembangkan model pembelajaran tersendiri yang khas dengan mempertimbangkan karakteristik mahasiswa termasuk kondisi psikhis mahasiswa, sifat materi yang akan dibahas atau diajarkan dan waktu pelaksanaan pembelajaran.

Pada satuan acara perkuliahan, dipertimbangkan juga pengetahuan, keterampilan dan sikap yang dibawa mahasiswa ke kelas. Termasuk pemikiran-pemikiran awal dan kesalahan persepsi yang mereka miliki.

Terdapat sepuluh karakter yang dituntut untuk dikembangkan pada pelaksanaan pembelajaran di kelas. Karakter-karakter ini tertulis pada satuan acara perkuliahan. Sepuluh karakter tersebut adalah kedisiplinan, penampilan, kesantunan, kemampuan bekerjasama, kemampuan berkomunikasi, komitmen, keteladanan, semangat, empati dan tanggung jawab. Pengembangan kriteria penilaian untuk sepuluh karakter ini diserahkan kepada dosen.

Pada satuan acara perkuliahan, beberapa model, pendekatan dan strategi yang berpengaruh kepada pembentukan karakter yang disebutkan di awal juga tercantum. Beberapa model, pendekatan atau strategi yang mempengaruhi pembentukan karakter adalah *Problem Based Instruction* (pembelajaran berdasarkan masalah), *Contextual teaching and learning*, Strategi MASTER berbantuan peta konsep, diskusi kelas, *cooperative learning* dan yang lainnya.

Problem Based Instruction adalah pendekatan yang efektif untuk pengajaran proses berfikir tingkat tinggi. Pembelajaran ini membantu peserta didik untuk memproses informasi yang sudah jadi dalam benaknya dan menyusun pengetahuan mereka sendiri tentang dunia sosial dan sekitarnya. Bahkan Resnick (dalam Trianto) menyatakan bahwa model pembelajaran berdasarkan masalah amat penting untuk menjembatani gap antara pembelajaran di sekolah formal dengan aktivitas mental yang lebih praktis yang dijumpai di luar sekolah.

Ciri-ciri utama model ini adalah pengajuan pertanyaan atau masalah, memusatkan keterkaitan antardisiplin, penyelidikan autentik, kerjasama dan menghasilkan karya dan peragaan. Dengan ciri-ciri ini, pembelajaran dengan pendekatan PBI, aspek-aspek seperti keyakinan terhadap kemampuan diri sendiri, optimis, objektif, bertanggung jawab, rasional serta realistis dapat dikembangkan (Martyanti, 2013:15).

Strategi MASTER berbantuan peta konsep juga patut dipertimbangkan. Hasil penelitian tindakan kelas yang dilakukan oleh Panggabean (2015) menunjukkan bahwa keaktifan mahasiswa selama pembelajaran Geometri Analitik Bidang Datar dengan menerapkan Strategi MASTER berbantuan peta konsep menunjukkan adanya peningkatan tiap siklus. Mengembangkan peta konsep menuntut mahasiswa untuk mengidentifikasi dan mengorganisasikan informasi serta membangun hubungan antara bagian-bagian informasi. Mahasiswa juga membuat simpul yang menunjukkan suatu konsep dan konsep-konsep tersebut dihubungkan menggunakan garis, yang diberi label untuk menunjukkan hubungan antar konsep. Hal ini akan secara alami membantu mahasiswa memahami keterkaitan antar konsep. Bahkan mereka dapat melihat adanya hubungan yang lebih luas antar beberapa gagasan kemudian mempelajarinya sebagai sebuah kesatuan yang kohesif.

Contextual teaching and learning (CTL) yang konstruktivistik, juga adalah pendekatan pembelajaran yang sesuai untuk geometri analitik bidang datar. Dengan tujuh komponen utama, yaitu konstruktivisme, bertanya, inkuiri, masyarakat belajar, pemodelan dan penilaian autentik, pendekatan ini membantu mahasiswa mencari hubungan konsep-konsep matematika dengan situasi lingkungannya yang masuk akal dan bermanfaat. Alasan peneliti karena pengajaran kontekstual adalah pengajaran yang memungkinkan peserta didik menguatkan, memperluas, dan menerapkan pengetahuan dan ketrampilan akademik mereka dalam berbagai macam tatanan dalam dan luar kelas.

Selain elemen tersebut, karakteristik dari CTL adanya kerjasama, saling menunjang, menyenangkan, pembelajaran terintegrasi dan menggunakan berbagai sumber. Hal-hal ini akan menghasilkan dasar-dasar pengetahuan yang mendalam dimana mahasiswa kaya akan pemahaman masalah dan cara menyelesaikannya.

Pembelajaran dengan kooperatif juga mengajarkan nilai karakter dan akademik sekaligus. Strategi ini melibatkan mahasiswa bekerja secara berkolaborasi untuk mencapai tujuan bersama. Pembelajaran ini disusun dalam sebuah usaha untuk meningkatkan partisipasi mahasiswa, memfasilitasi mahasiswa dengan pengalaman sikap kepemimpinan dan membuat keputusan dalam kelompok, serta memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk berinteraksi dan belajar bersama-sama mahasiswa yang berbeda latar belakangnya.

Keuntungan yang lebih spesifik adalah (1) pembelajaran dengan kooperatif mengajarkan nilai-nilai kerjasama; (2) pembelajaran dengan kooperatif membangun komunitas di dalam kelas; (3) pembelajaran dengan kooperatif mengajarkan keterampilan dasar kehidupan yaitu bekerjasama untuk mencapai tujuan bersama; (4) pembelajaran dengan kooperatif memperbaiki pencapaian akademik, rasa percaya diri (Lickona, 2013: 276).

Pembelajaran model diskusi kelas merupakan pendekatan yang disarankan dalam satuan acara perkuliahan. Dua aspek diskusi kelas adalah kemampuan untuk mengembangkan pertumbuhan kognitif dan kemampuan untuk menghubungkan dan menyatukan aspek kognitif dan aspek sosial pembelajaran.

Diskusi merupakan situasi dimana mahasiswa dan dosen, atau antara mahasiswa dengan mahasiswa yang lain berbincang satu sama lain dan berbagi gagasan dan pendapat. Dosen akan memahami apa yang ada di dalam pemikiran mahasiswa dan bagaimana memproses gagasan dan informasi yang diajarkan melalui komunikasi yang terjadi selama pembelajaran berlangsung. Pertanyaan yang diajukan untuk merangsang diskusi adalah pertanyaan dengan tingkat kognitif tinggi. Jadi, Sistem diskusi merupakan sentral untuk menciptakan lingkungan belajar yang positif.

V. KESIMPULAN

Pembelajaran yang mengintegrasikan karakter yang baik bekerja melalui isi materi dalam pembelajaran. Proses pengintegrasian karakter yang baik dimulai dengan tahap perencanaan. Perencanaan ini dapat terlihat dalam rencana pembelajaran semester, satuan acara perkuliahan dan bahan ajar yang akan digunakan di kelas, tahap pelaksanaan yaitu pada saat perkuliahan berlangsung dan tahap evaluasi.

Karena proses pengintegrasian karakter yang baik dapat berjalan efektif jika didukung oleh semua komponen-komponen belajar seperti, komponen input yaitu mahasiswa itu sendiri, komponen instrumental input yang berupa fasilitas yang menunjang dan komponen environmental input yaitu lingkungan maka pada penelitian selanjutnya, bahan ajar akan divalidasi oleh ahli sebelum digunakan pada ujicoba kelas kecil dan kelas yang sesungguhnya. Integrasi karakter-karakter yang baik dilakukan pada pelaksanaan pembelajaran.

DAFTAR PUSTAKA

- Arends, Richard I. 1997. *Classroom Instruction and Management*. The McGraw-Hill Company: New York.
- Asyanti, Setia. 2012. *Pendidikan Karakter Di Perguruan Tinggi: Sudah Terlambatkan?* Surakarta: Fakultas Psikologi Universitas Muhammadiyah Surakarta tersedia <https://publikasiilmiah.ums.ac.id>
- Lickona, Thomas. 2014. *Educating For Character: How Our Schools Can Teach Respect and Responsibility*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Martyanti, Adhetia, 2013. Membangun *Self-Confidence* Siswa Dalam Pembelajaran Matematika Dengan Pendekatan Problem Solving. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNY 9 November 2013 Yogyakarta*. Hal. 15- 22.

- Muslich, Masnur. 2014. *Pendidikan Karakter: Menjawab Tantangan Krisis Multidimensional*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Panggabean, Ellis Mardiana. 2015. *Meningkatkan Aktivitas Dan Hasil Belajar Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FKIP UMSU Pada Perkuliahan Geometri Analitik Bidang Melalui Strategi MASTER Berbantuan Peta Konsep*. Medan: LP2M UMSU.
- Salafudin. 2013. Pendidikan Karakter Melalui Pembelajaran Matematika. *Jurnal Penelitian* Vol. 10, No. 1, Mei 2013. Hlm. 63-76.
- Sijabat, Eva Yuliana. 2016. Character Building during the Learning Process of Mathematics for the second Grade of SMP Stella Duce 2. *Skripsi*. Yogyakarta: Sanata Darma University.
- Slavin, Robert. E. 2006. Educational Psychology. Theory & Practise. Edisi 8. A Divisin of Paramount Publishing, USA.
- Trianto. 2011. Mendesain Model Pembelajaran Inovatif-Progresif. Jakarta: Kencana.

LAMPIRAN 2

PROTOTIPE BAHAN AJAR

GEOMETRI ANALITIK BIDANG

GEOMETRI ANALITIK BIDANG

DISUSUN OLEH

ELLIS MARDIANA PANGGABEAN

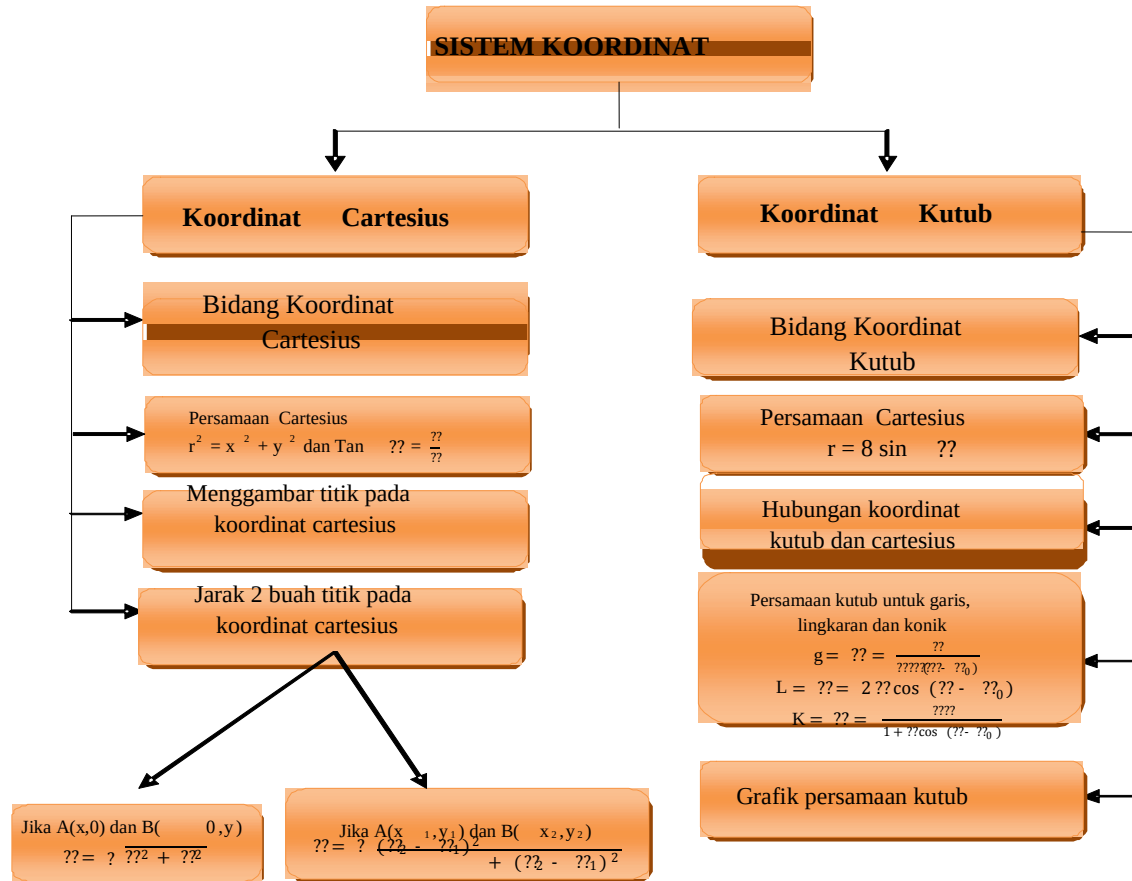
DAFTAR ISI

	Halaman
Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
BAB I SISTEM KOORDINAT	1
A. Sistem Koordinat Cartesius	3
B. Sistem Koordinat Khutub	12
BAB II VEKTOR PADA BIDANG	21
A. Pengertian Vektor	24
B. Operasi Pada Vektor	32
BAB III GARIS LURUS PADA BIDANG	41
A. Persamaan Garis Lurus	44
B. Kedudukan Dua garis Lurus	47
C. Berkas Garis	49
D. Persamaan Normal Hesse	51
E. Sudut Antara Dua Garis	52
F. Jarak Titik Terhadap Garis	54
BAB IV LINGKARAN	62
A. Persamaan Lingkaran	64
B. Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran	69
C. Persamaan Garis Kutub	76
D. Kuasa Suatu Titik	79
E. Garis Kuasa	80

F. Titik Kuasa	81
G. Berkas Lingkaran	82
BAB V PARABOLA	90
A. Persamaan Parabola	91
B. Garis Singgung Pada Parabola	99
C. Titik Dan Garis Polar	105
BAB VI ELLIPS	109
A. Persamaan Ellips	112
B. Persamaan Garis Singgung Pada Ellips	122
BAB VII HIPERBOLA	130
A. Persamaan Hiperbola	132
B. Kedudukan Garis dan Hiperbola	141
C. Hiperbola Sekawan	144
D. Dua Garis Tengah Sekawan	147
DAFTAR PUSTAKA	

BAB I

SISTEM KOORDINAT



Gambar 1.1. Peta Konsep Sistem Koordinat

Sejarawan Matematika



Istilah **Kartesius** digunakan untuk mengenang ahli matematika sekaligus [filsuf](#) dari [Perancis](#) [Descartes](#), yang perannya besar dalam menggabungkan [aljabar](#) dan [geometri](#) (Cartesius adalah [latinisasi](#) untuk Descartes). Hasil kerjanya sangat berpengaruh dalam perkembangan [geometri analitik](#), [kalkulus](#), dan [kartografi](#).

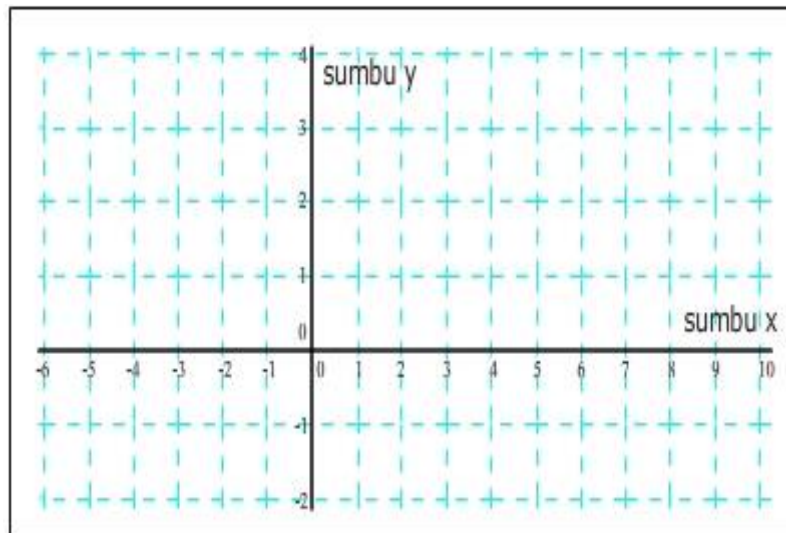
Ide dasar sistem ini dikembangkan pada tahun [1637](#) dalam dua tulisan karya Descartes. Pada bagian kedua dari tulisannya [Discourse on the Method](#), ia memperkenalkan ide baru untuk menggambarkan posisi [titik](#) atau objek pada sebuah permukaan, dengan menggunakan dua sumbu yang tegak lurus satu dengan yang lain.

A. Sistem Koordinat Cartesius

1. Letak Titik-Titik Pada Bidang Koordinat Cartesius

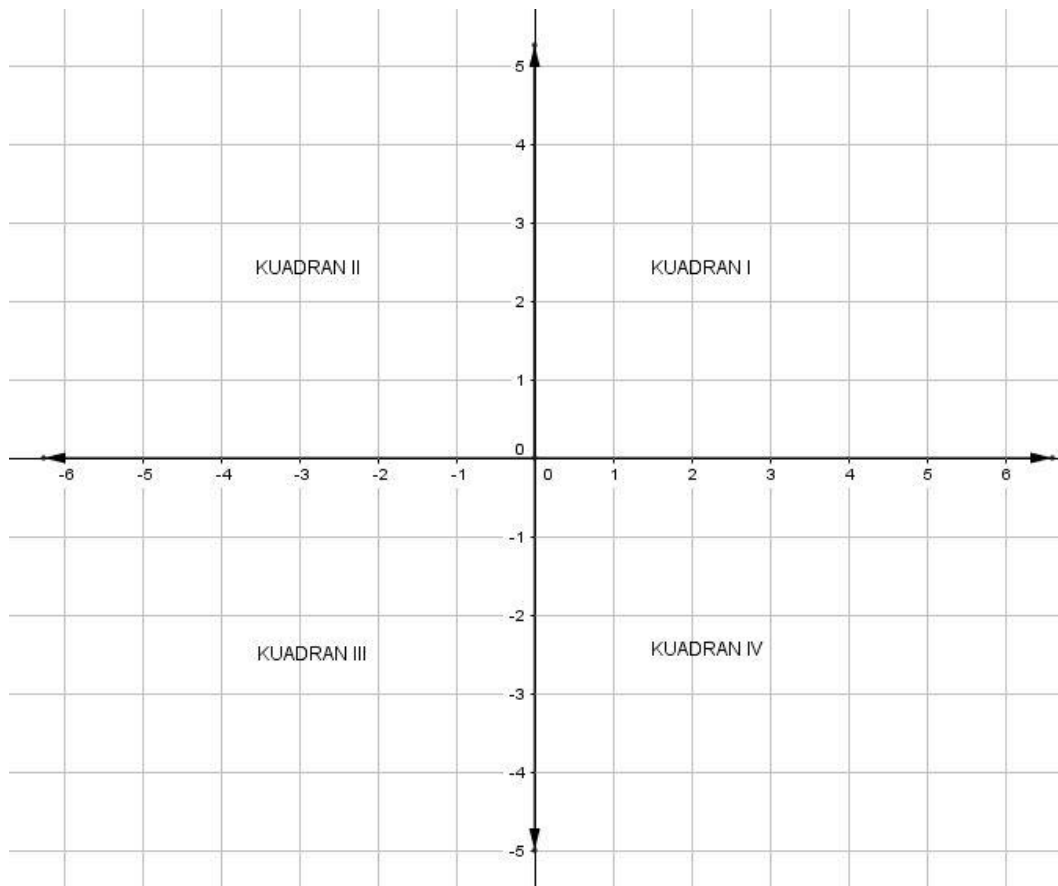
Jika pada garis bilangan, sebuah titik berkorespondensi satu-satu dengan sebuah bilangan real maka pada bidang, sebuah titik juga berkorespondensi satu-satu dengan hanya satu pasangan bilangan real. Bilangan pertama dari pasangan bilangan real ini menunjukkan bilangan pada sumbu x atau jarak titik terhadap sumbu y sedangkan bilangan kedua menunjukkan bilangan pada sumbu-y atau jarak titik terhadap sumbu x. Sumbu x digambarkan horizontal (mendatar) dan sumbu y digambarkan vertikal (tegak). Keduanya saling tegak lurus dan berpotongan di titik asal O. Garis horizontal arah ke kanan adalah positif dan garis vertikal arah ke atas adalah positif.

Bilangan-bilangan pada sumbu x disebut absis atau koordinat-x. Bilangan-bilangan pada sumbu-y disebut ordinat atau koordinat-y. Keduanya disebut pasangan sumbu koordinat atau dikenal dengan Sistem Koordinat Cartesius. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.2. Bidang Koordinat Cartesius

Kedua sumbu membagi bidang datar atas 4 bagian yang disebut kuadran, seperti tampak pada gambar 2 berikut.



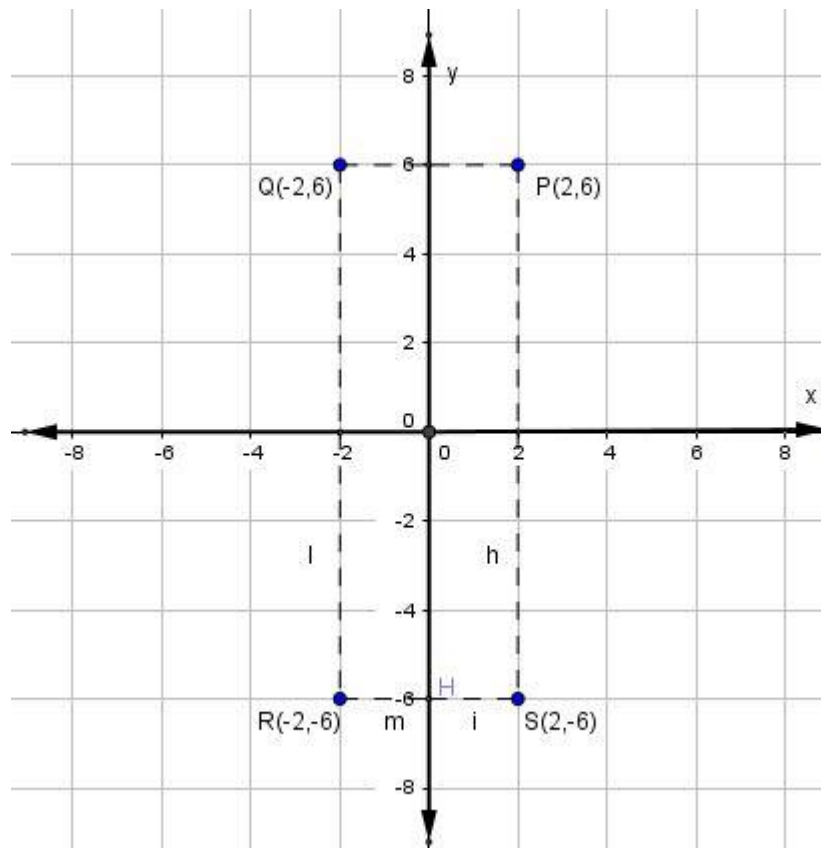
Gambar 1.3. Bidang Koordinat terbagi atas 4 Kuadran

Perhatikan gambar di atas, Kuadran I adalah tempat kedudukan titik-titik dimana x positif dan y positif, Kuadran II tempat kedudukan titik-titik dimana x negatif dan y positif, Kuadran III tempat kedudukan titik-titik dimana x negatif dan y negatif. Kuadran IV tempat kedudukan titik-titik dengan x positif dan y negatif. Sumbu x adalah tempat kedudukan titik-titik berbentuk $(x, 0)$. Sumbu y adalah tempat kedudukan titik-titik berbentuk $(0, y)$.

Dengan demikian tiap titik pada bidang dapat ditentukan oleh sepasang bilangan, yang pertama menunjukkan absis dan yang kedua ordinat. Sebaliknya tiap pasang bilangan menentukan sebuah titik pada bidang. Jadi,

Sebuah titik P yang berabsis x_0 dan berordinat y_0 ditulis (x_0, y_0) .

Pada gambar berikut, P, Q, R dan S berturut-turut mempunyai koordinat (2,6), (-2,6), (-2, -6) dan (2, -6).



Gambar 1.4. Letak Titik P, Q, R dan S pada Bidang Koordinat

Teorema 1.1. Jika $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dua titik pada bidang koordinat maka

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

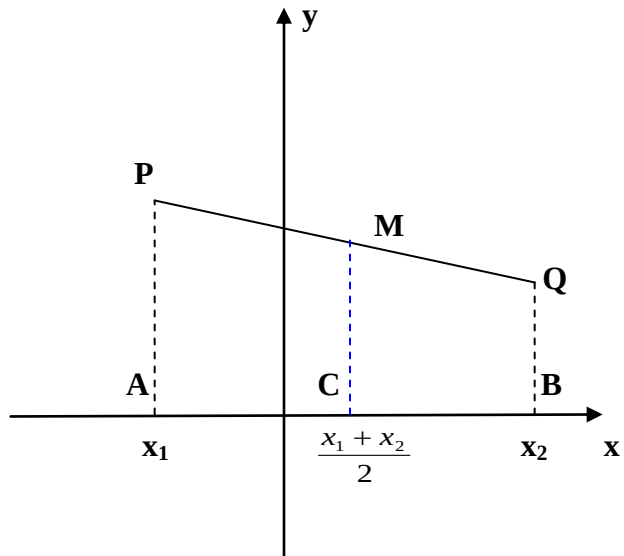
adalah titik tengah ruas garis PQ .

Proyeksi P dan Q pada sumbu x berturut-turut adalah titik-titik $A(x_1, 0)$ dan $B(x_2, 0)$. M adalah titik tengah ruas garis PQ. Proyeksi M pada sumbu x adalah $C(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$.

Jadi, melalui definisi $\frac{x_1 + x_2}{2}$ adalah absis dari M.

Dengan cara yang sama M mempunyai ordinat $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

Sehingga $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$.



Gambar 1.5. M titik tengah ruas garis PQ

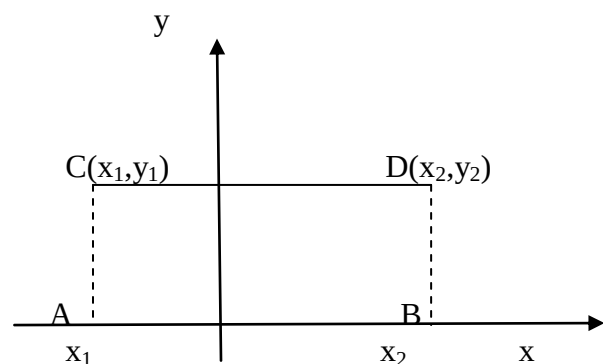
Dengan cara yang sama dapat dibuktikan, bahwa jika:

$$PM : MQ = m : n \text{ (M antara P dan Q) maka } (m + n) x_M = m \cdot x_Q + n \cdot x_P .$$

2. Jarak Dua Titik Sebarang Pada Bidang Koordinat

2.1. Jarak Dua Titik yang Terletak Pada sebuah Garis

Jarak $|AB|$ diantara dua titik $A(x_1, 0)$ dan $B(x_2, 0)$ pada sumbu x adalah $|x_2 - x_1|$. Titik-titik $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_1, y_1)$ dan $D(x_2, y_2)$ adalah titik pada persegipanjang ABCD dimana $AB \equiv CD$. Jadi $|CD| = |AB| = |x_2 - x_1|$. Dengan cara yang sama, ruas garis yang sejajar dengan sumbu y katakan ruas garis EF dimana $E(x_1, y_1)$ dan $F(x_2, y_2)$ mempunyai panjang $|y_2 - y_1|$.



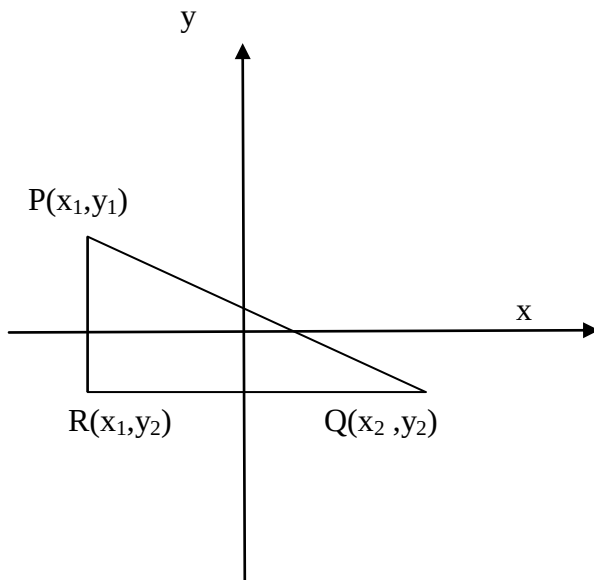
Gambar 1.6. Jarak $C(x_1, y_1)$ dan $D(x_2, y_2)$

2.2. Jarak Dua Titik Sebarang Pada Bidang Koordinat

Jarak $|PQ|$ antara titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Bukti: Titik-titik $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ dan $R(x_1, y_2)$ adalah titik-titik pada segitiga siku-siku.



Gambar 1.7. Jarak $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$

Karena ruas garis RQ sejajar dengan sumbu x dan PR sejajar dengan sumbu y maka

$$|RQ| = |x_2 - x_1|, \quad |PR| = |y_2 - y_1|.$$

Melalui teorema Pythagoras, diperoleh

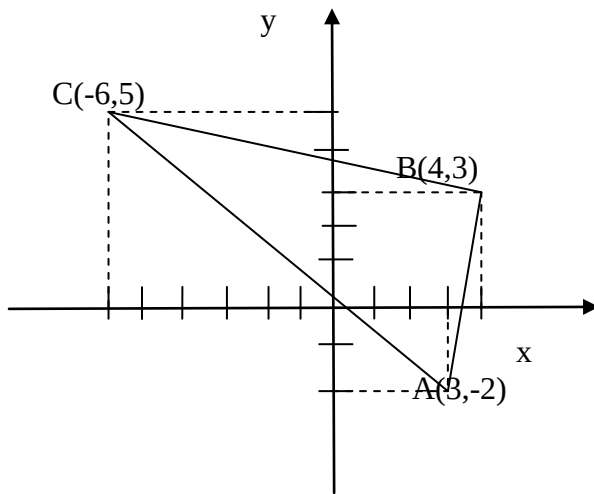
$$|PQ|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\text{Atau } |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh:

Tunjukkan bahwa titik-titik A(3, -2), B(4, 3) dan C(-6, 5) membentuk segitiga siku-siku dan tentukan luas segitiga tersebut.



Gambar 1.8. Segitiga Siku-Siku

Penyelesaian:

Melalui rumus jarak, diperoleh

$$|AB| = \sqrt{(4-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

$$|BC| = \sqrt{(-6-4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{104}$$

$$|AC| = \sqrt{(-6-3)^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{130}$$

Karena $|AB|^2 + |BC|^2 = 26 + 104 = 130 = |AC|^2$ maka segitiga ABC siku-siku di B.

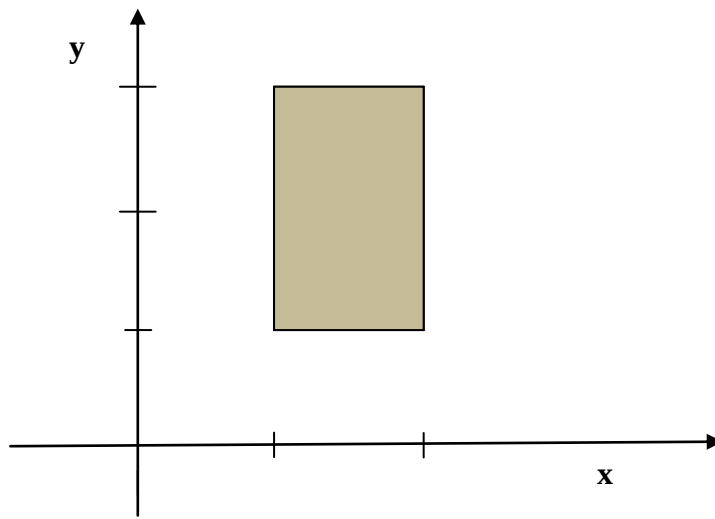
$$\text{Luas segitiga ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{26} \sqrt{104} = 26.$$

2. 3. Grafik Bidang

Grafik (pada bidang) adalah himpunan titik-titik (pada bidang) yang ditunjukkan dengan himpunan pasangan terurut.

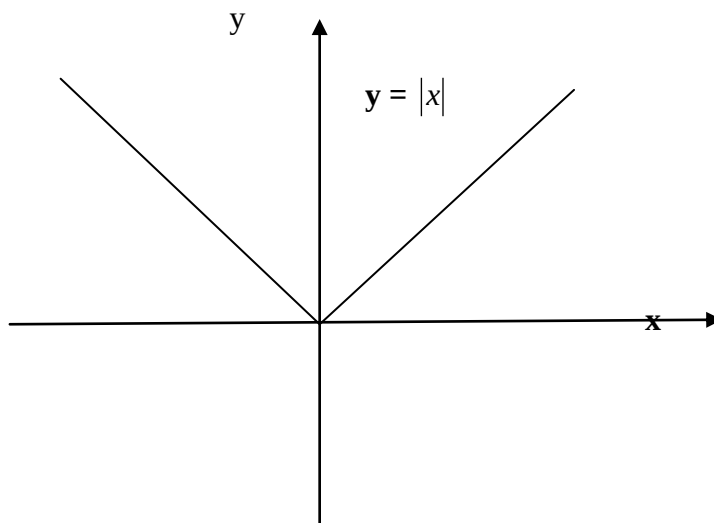
Contoh:

1. Grafik dari $\{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$ merupakan sebuah bidang yang berbentuk persegi panjang sebagaimana gambar berikut.



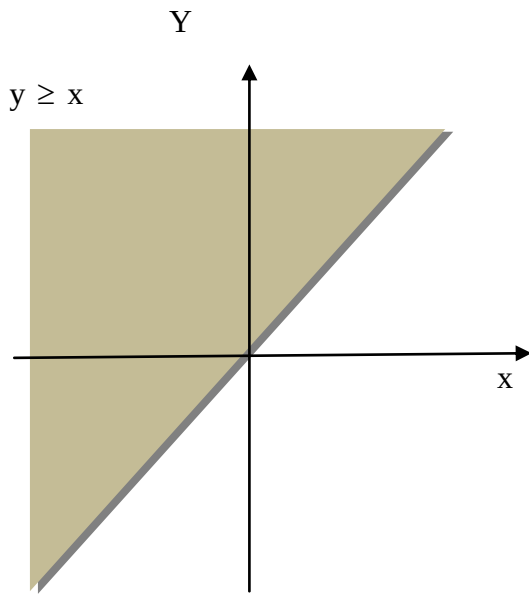
Gambar 1.9. Grafik dari $\{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$

2. Grafik dari $y = |x|$ adalah sebagaimana pada gambar berikut.

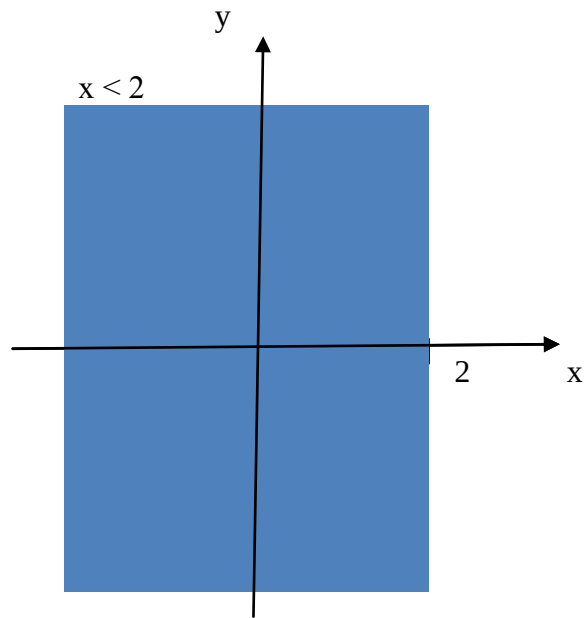


Gambar 1.10. Grafik dari $y = |x|$

3. Gambarkan grafik dari pertidaksamaan $y \geq x$ dan $x < 2$.



Gambar 1.11. Grafik $y \geq x$



Gambar 1.12. Grafik $x < 2$.



Hipparchus

Konsep sudut dan jari-jari sudah digunakan oleh manusia sejak zaman purba, paling tidak pada milenium pertama [SM](#). Astronom dan astrolog [Yunani](#), [Hipparchus](#), (190–120 SM) menciptakan tabel fungsi [chord](#) dengan menyatakan panjang chord bagi setiap sudut, dan ada rujukan mengenai penggunaan koordinat polar olehnya untuk menentukan posisi bintang-bintang. Dalam karyanya [On Spirals](#), [Archimedes](#) menyatakan [Archimedean spiral](#), suatu fungsi yang jari-jarinya tergantung dari sudut. Namun, karya-karya Yunani tidak berkembang sampai ke suatu sistem koordinat sepenuhnya.

Dari abad ke-8 M dan seterusnya, para astronom mengembangkan metode untuk menghitung arah ke [Mekkah](#) ([kiblat](#))— dan jaraknya — dari semua lokasi di bumi.

B. Sistem Koordinat Kutub

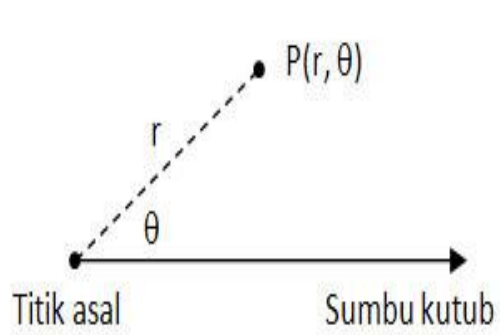
Kedudukan suatu titik pada bidang tidak hanya dapat ditunjukkan dengan memberikan jarak berarah dari dua sumbu yang tegak lurus. Cara lainnya adalah dengan menggunakan sumbu kutub.

Sistem koordinat kutub (sistem koordinat polar) dalam [matematika](#) adalah suatu [sistem koordinat 2-dimensi](#) di mana setiap [titik](#) pada [bidang](#) ditentukan dengan [jarak](#) dari suatu titik yang telah ditetapkan dan suatu [sudut](#) dari suatu arah yang telah ditetapkan.

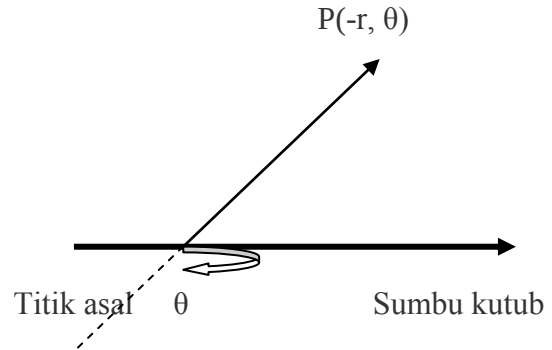
Titik yang telah ditetapkan (analog dengan titik origin dalam [sistem koordinat Kartesius](#)) disebut *pole* atau "kutub", dan [ray](#) atau "[sinar](#)" dari kutub pada arah yang telah ditetapkan disebut "aksis polar" (*polar axis*). Jarak dari suatu kutub disebut *radial coordinate* atau *radius*, dan sudutnya disebut *angular coordinate*, *polar angle*.

Jika pada koordinat Kartesius sebuah titik dikaitkan dengan satu dan hanya satu pasangan bilangan real maka pada koordinat kutub, setiap titik dapat dinyatakan oleh banyak pasangan koordinat kutub.

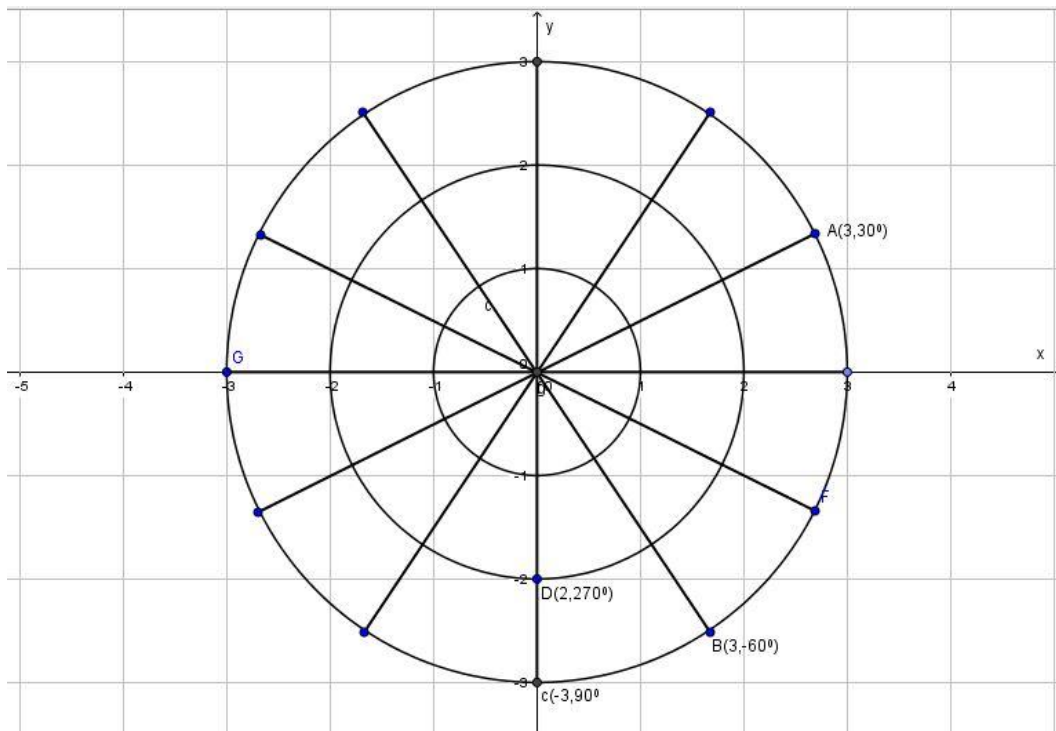
Titik P dinyatakan dalam pasangan (r, θ) , di mana r adalah jarak titik P ke titik asal, dan θ adalah sudut dari sumbu kutub ke garis OP. Bilangan r disebut koordinat radial dan θ disebut koordinat angular atau sudut kutub dari P. Sudut dinyatakan dalam angka positif jika diukur berlawanan jarum jam dan dinyatakan dengan angka negatif jika diukur searah jarum jam. Secara umum, jika P mempunyai koordinat (r, θ) , maka P juga mempunyai koordinat $(r, \theta \pm 2n\pi)$ dan $(-r, \theta \pm (2n - 1)\pi)$ untuk tiap bilangan bulat n .



Gambar 1.13 Koordinat Kutub (r, θ)



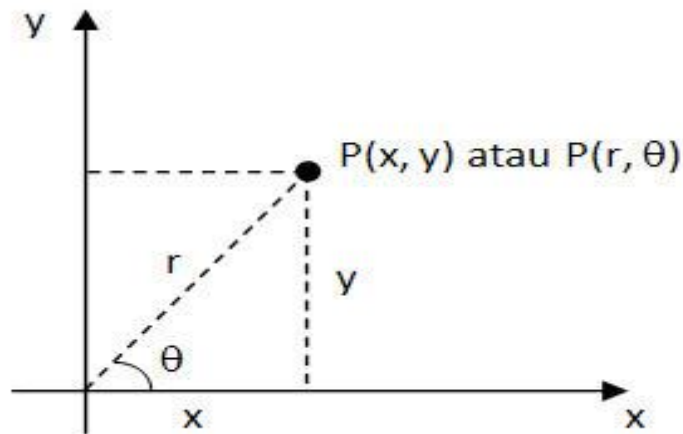
Gambar 1.14. Koordinat Kutub $(-r, \theta)$



Gambar 1.15. Letak Titik-Titik pada Bidang Koordinat Kutub

Hubungan antara Koordinat Kutub dan Koordinat Cartesius

Hubungan antara koordinat kutub dan koordinat Cartesius dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 1.16. Koordinat Cartesius dan Kutub dari Titik P

Perhatikan gambar di atas. Titik P dinyatakan dalam koordinat Cartesius dan koordinat kutub

dengan $x = r \cos \theta$ atau $\cos \theta = \frac{x}{r}$ dan

$$y = r \sin \theta \text{ atau } \sin \theta = \frac{y}{r}$$

Berlaku $r^2 = x^2 + y^2$ dan $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

Sehingga untuk mengubah koordinat Cartesius ke dalam koordinat kutub atau sebaliknya dapat digunakan rumus di atas.

Contoh:

1. Tentukan koordinat kutub dari (4, -4).

Penyelesaian:

$$r^2 = x^2 + y^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32$$

$$r = 4\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Karena titik berada pada kuadran ke IV maka $\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Sehingga koordinat kutub dari titik (4, -4) adalah $(4\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$.

2. Tentukan koordinat Cartesius dari $(6, \frac{5}{6}\pi)$.

Penyelesaian:

$$x = 6 \cos \frac{5}{6}\pi = 6 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -3\sqrt{3}.$$

$$y = 6 \sin \frac{5}{6}\pi = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

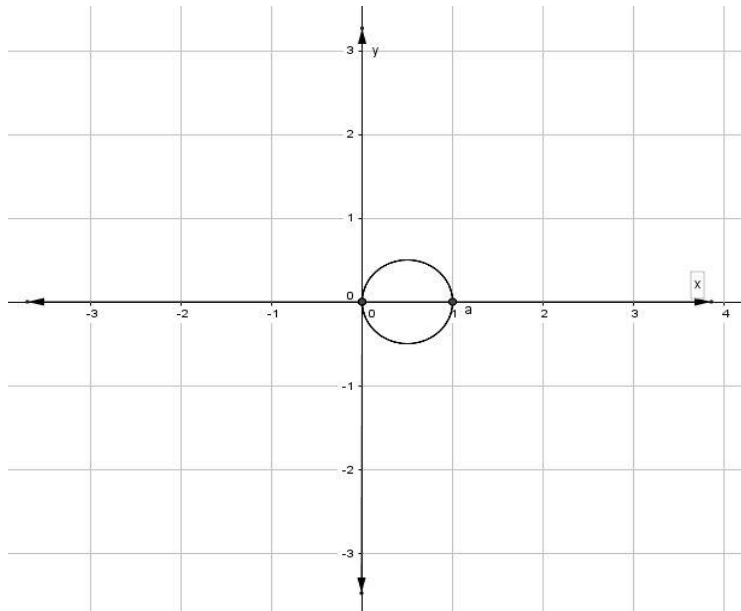
Jadi, koordinat Cartesius dari $(6, \frac{5}{6}\pi)$ adalah $(-3\sqrt{3}, 3)$.

Sketsa Grafik dalam Koordinat Kutub

Suatu grafik dapat dinyatakan dalam sistem koordinat kutub. Untuk membuat sketsanya, akan lebih mudah jika menggunakan tabel untuk mencari nilai r untuk θ dari 0 hingga 2π radian.

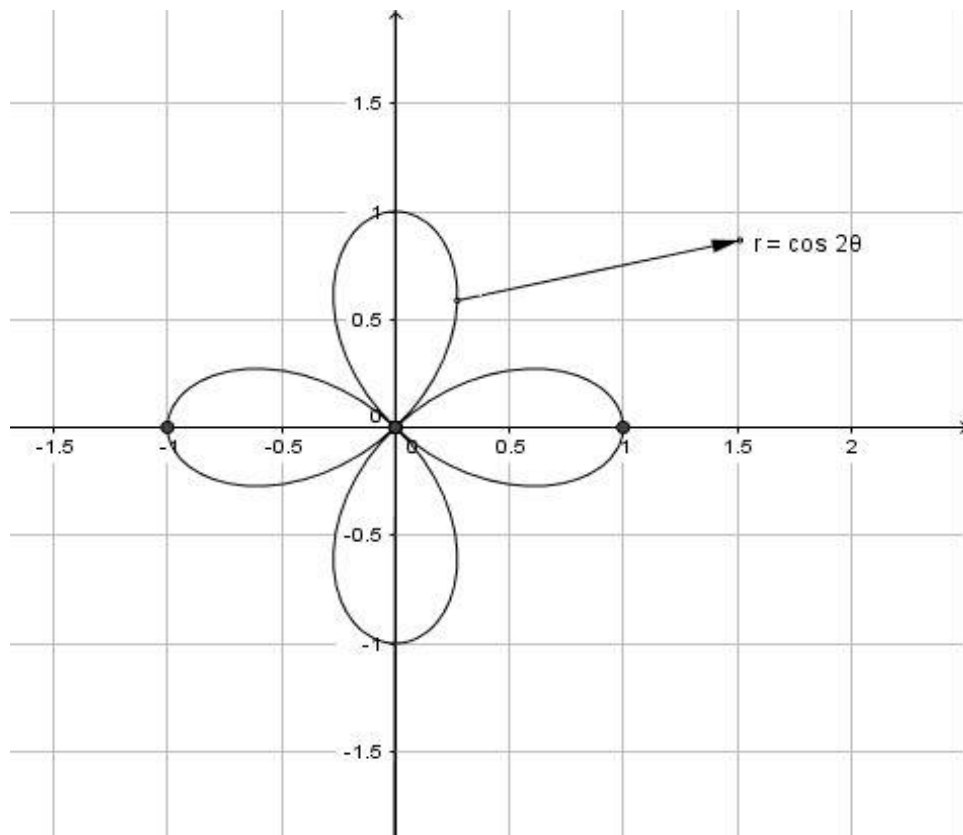
Contoh:

1. Koordinat kutub pada $r = \sin \theta$



Gambar 1.17. Sketsa $r = \sin \theta$

2. Koordinat kutub pada $r = \cos 2\theta$



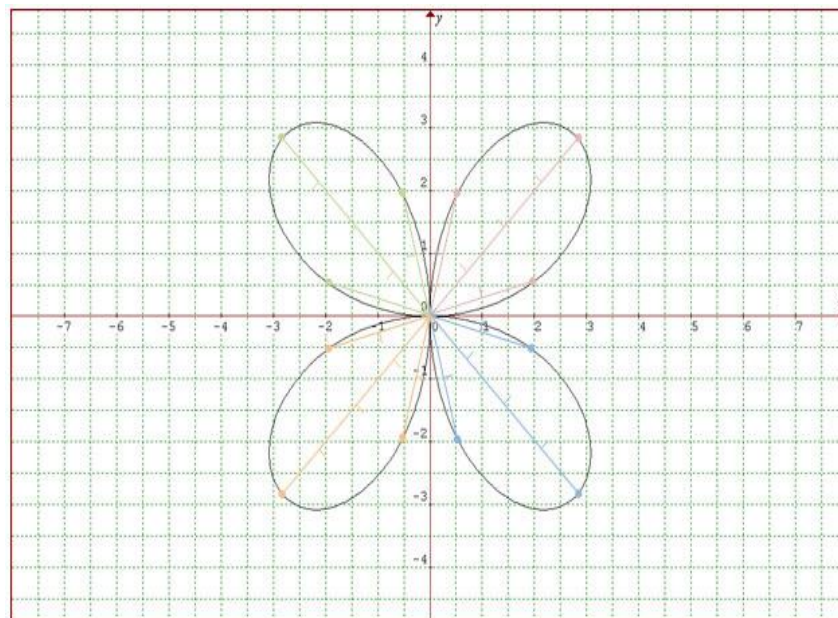
Gambar 1.18. Sketsa $r = \cos 2\theta$

3. Sketsalah grafik $r = 4 \sin 2\theta$

θ	r
0	0
$\pi/12$ (15°)	2
$\pi/4$ (45°)	4
$5\pi/12$ (75°)	2
$\pi/2$ (90°)	0
$7\pi/12$ (105°)	-2
$3\pi/4$ (135°)	-4
$5\pi/12$ (165°)	-2
π (180°)	0
$13\pi/12$ (195°)	2
$5\pi/4$ (225°)	4
$17\pi/12$ (255°)	2
$3\pi/2$ (270°)	0
$19\pi/12$ (285°)	-2
$7\pi/4$ (315°)	-4
$23\pi/12$ (345°)	-2
2π (360°)	0

Tabel 1.1. $r = 4 \sin 2\theta$

Sketsa: (setiap warna pada tabel diwakili oleh garis yang berwarna sama pada gambar)



Gambar 1.19. grafik $r = 4 \sin 2\theta$

Rangkuman

1. Sebuah titik P yang berabsis x_0 dan berordinat y_0 ditulis (x_0, y_0) .
2. Jika P mempunyai koordinat (r, θ) maka r adalah jarak titik P ke titik asal. θ menyatakan sudut dari sumbu kutub ke garis OP. Bilangan r disebut koordinat radial dan θ disebut koordinat angular atau sudut kutub dari P. Sudut dinyatakan dalam angka positif jika diukur berlawanan jarum jam dan dinyatakan dengan angka negatif jika diukur searah jarum jam.
3. Jika $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dua titik pada bidang koordinat maka

$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ adalah titik tengah ruas garis PQ.

4. Jika $PM : MQ = m : n$ (M antara P dan Q) maka $(m + n) x_M = m \cdot x_Q + n \cdot x_P$.
5. Jarak $|PQ|$ antara titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6. Untuk mengubah koordinat Cartesius kepada koordinat kutub atau sebaliknya dapat digunakan hubungan berikut.

$$x = r \cos \theta \text{ atau } \cos \theta = \frac{x}{r} \text{ dan } y = r \sin \theta \text{ atau } \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{dan} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

SOAL-SOAL:

1. Gambar sistem koordinat Cartesius dan buatlah sketsa himpunan titik-titik berkoordinat (x, y) yang memenuhi syarat yang diberikan.

- | | |
|------------|------------------------------|
| a. $x = 0$ | b. $y = 0$ |
| c. $y < 0$ | d. $x \geq 1$ dan $y \leq 2$ |
| e. $x = 3$ | f. $ x = 5$ |

Garis yang menghubungkan titik-titik berikut adalah garis mendatar atau garis tegak. Tentukan yang mana merupakan garis tegak ataupun mendatar dan tentukan jarak kedua titik tersebut.

2. a. $A(9, 2), B(9, 2)$
b. $A(2, -6), B(3, -6)$
c. $A(8, -1), B(6, 1)$
3. a. $A(-4, \sqrt{2}), B(-4, -3)$
b. $A(3, -11), B(3, -4)$
c. $A(0, 0), B(0, -5)$

Untuk soal 4) sampai 7) berikut, tentukan jarak kedua titik dan tentukan titik tengah garis yang menghubungkan A dan B.

4. $A(2, 5), B(-1, 1)$.
5. $A(7, 1), B(1, 9)$.
6. $A(2, 0), B(-3, 6)$.
7. $A(-2, -6), B(-7, -4)$.
8. Buktikan bahwa titik-titik $(-1, 7), (5, 4), (2, -2)$ dan $(-4, 1)$ adalah titik-titik sudut suatu persegi.
9. Buktikan bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya $(5, -2), (6, 5)$ dan $(2, 2)$ adalah segitiga siku-siku sama kaki.
10. Buktikan bahwa $(1, 3), (4, 2)$ dan $(-2, -6)$ adalah titik-titik dari suatu segitiga siku-siku.
11. Buktikan bahwa $(0, -2), (-4, 8)$ dan $(3, 1)$ terletak pada lingkaran yang berpusat pada $(-2, 3)$.
12. Dari pasangan berurut berikut, yang manakah yang merupakan penyelesaian dari $x^2 - 2x + y = 4$?
- | | |
|---|--------------------------|
| a. $(0, 4)$ | b. $(-3, 7)$ |
| c. $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4}\right)$ | d. $(1 + \sqrt{5-t}, t)$ |

Jb.a dan d

13. Tentukan k, jika (2, k) mempunyai jarak yang sama terhadap titik (3, 7) dan (9, 1).

Jb. $k = 0$.

14. Tentukan letak titik-titik berikut pada koordinat polar.

- | | |
|--------------------|-------------------|
| a. $(3, \pi/4)$ | b. $(-5, 2\pi/3)$ |
| c. $(1, \pi/2)$ | d. $(4, 7\pi/6)$ |
| e. $(-2, -4\pi/3)$ | f. $(0, \pi)$ |

15. Tentukan koordinat Cartesius titik-titik berikut, jika koordinat polarnya adalah

- | | |
|--------------------|------------------|
| a. $(6, \pi/6)$ | b. $(7, 2\pi/3)$ |
| c. $(8, 9\pi/4)$ | d. $(-5, 0)$ |
| e. $(-2, -3\pi/2)$ | f. $(7, -\pi/4)$ |

16. Nyatakan koordinat Cartesius berikut dalam koordinat polar dengan $r \geq 0$ dan $0 \leq \theta < 2\pi$.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a. $(-5, 0)$ | b. $(2\sqrt{3}, -2)$ |
| c. $(0, -2)$ | d. $(-8, -8)$ |
| e. $(-3, 3\sqrt{3})$ | f. $(1, 1)$ |

Sketsa kurva berikut pada koordinat polar.

17. $r = \cos 2\theta$

18. $r = 2(1 + \sin \theta)$

19. $r = 4 \cos 3\theta$

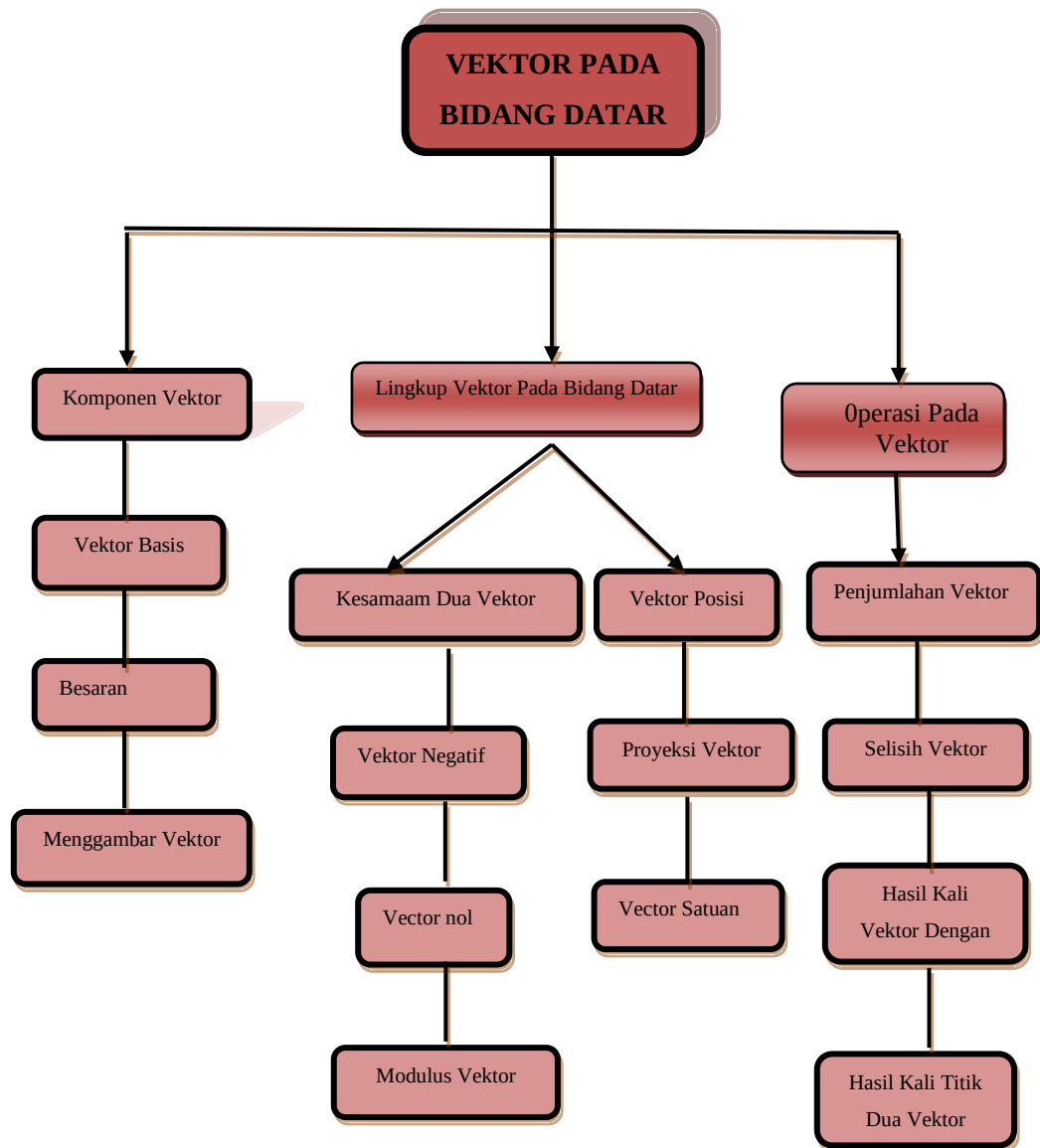
20. $r = 1 - \cos \theta$

21. Buktikan bahwa jarak titik-titik dengan koordinat polar (r_1, θ_1) dan (r_2, θ_2) adalah

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

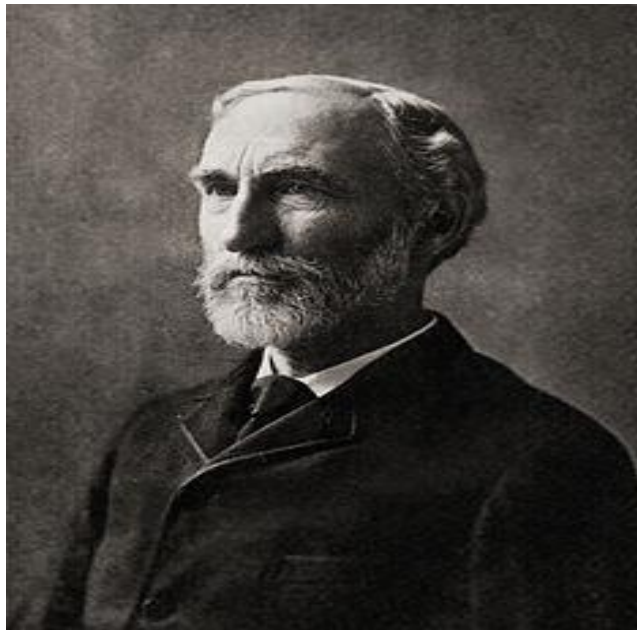
BAB II

VEKTOR PADA BIDANG



Gambar 2.1. Peta Konsep Vektor Pada Bidang

Sejarawan Matematika



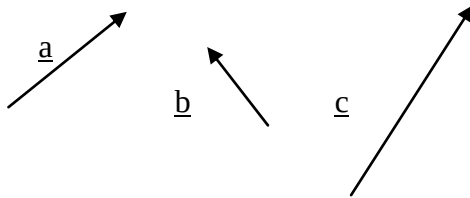
Josiah Willard Gibbs ilmuwan pertama yang memberikan gagasan mengenai vektor, dilahirkan di New Haven, Connecticut, USA pada 11 Februari 1839.

Josiah Willard Gibbs merupakan ilmuwan Amerika Serikat yang sangat kasual dalam keilmuannya, sederhana dalam cara, ramah dan baik hati dalam pergaulan dengan sesama anak buahnya, tidak pernah menunjukkan ketidaksabaran, tanpa ambisi pribadi atau keinginan sedikit pun untuk meninggikan diri. Dalam benak orang-orang yang mengenalnya, kebesaran prestasi intelektualnya tidak akan menaungi keindahan dan martabat hidupnya. Menginjak usia 15 tahun telah berhasil masuk ke University Of Yale. Prestasi mengagumkan kembali terulang, ia lulus lebih cepat dari kakak kelasnya pada 1858 dan ia dianugerahi penghargaan untuk keunggulannya dalam Matematika dan bahasa Latin. Pada usia 19 tahun ia tetap tinggal di Yale sebagai mahasiswa pascasarjana di Sheffield Scientific School. Selama dua tahun pertama ia mengajar bahasa Latin dan filsafat alam sedangkan untuk tahun ketiga ia mengajar fisika. Dalam matematika, ia menyumbangkan gagasan analisis vektor.

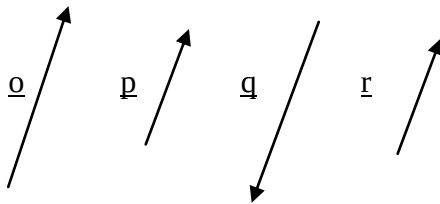
A. Pengertian Vektor

Besaran yang mempunyai arah dan besar biasanya dinyatakan dengan segmen garis berarah. Segmen garis berarah tersebut dinamakan **vektor**. Panjang segmen garis berarah menyatakan besar vector, sedangkan arah vektor dinyatakan oleh kemiringan segmen garis dan anak panahnya.

Untuk menyatakan suatu vector dapat dilakukan pada bidang datar atau bidang koordinat cartesius XOY dengan menggambarkan ruas garis dengan anak panah di salah satu ujungnya. Panjang ruas garis mewakili besar (panjang) vektor dan anak panah mewakili arah vektor. Vektor disimbolkan dengan huruf tebal atau dengan huruf yang digaris bawah.



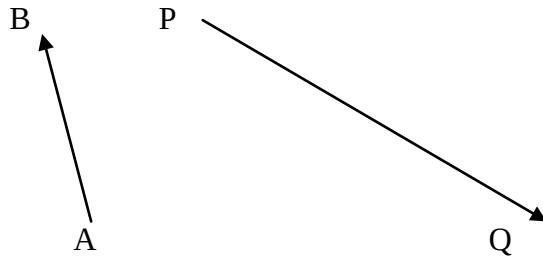
Gambar 2.2. Vektor yang mempunyai besar dan arah yang Berbeda



Gambar 2.3. Vektor dengan Arah Berbeda

Pada gambar, vektor $\underline{o}$ dan $\underline{p}$ mempunyai arah sama tetapi panjang berbeda, vektor $\underline{o}$ dan $\underline{q}$ mempunyai panjang yang sama tetapi arah yang berbeda, sedangkan vektor $\underline{p}$ dan $\underline{r}$ mempunyai arah dan panjang yang sama.

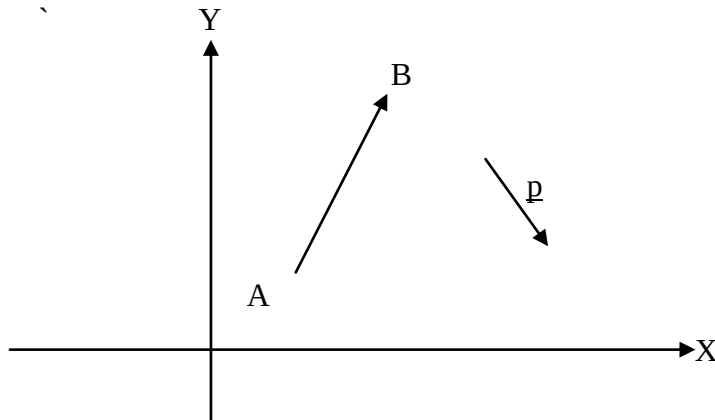
Vektor juga dapat diberi simbol dengan menyebutkan pangkal dan ujung vektor dengan huruf kapital dan di atasnya diberi tanda panah.



Gambar 2.4. Representasi Vektor

Pada gambar A.3. terdapat vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{PQ}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ mempunyai pangkal di titik A dan ujung di titik B. vektor $\overrightarrow{PQ}$ mempunyai pangkal di titik P dan ujung di titik Q.

Vektor juga dapat digambarkan pada bidang koordinat cartesius.

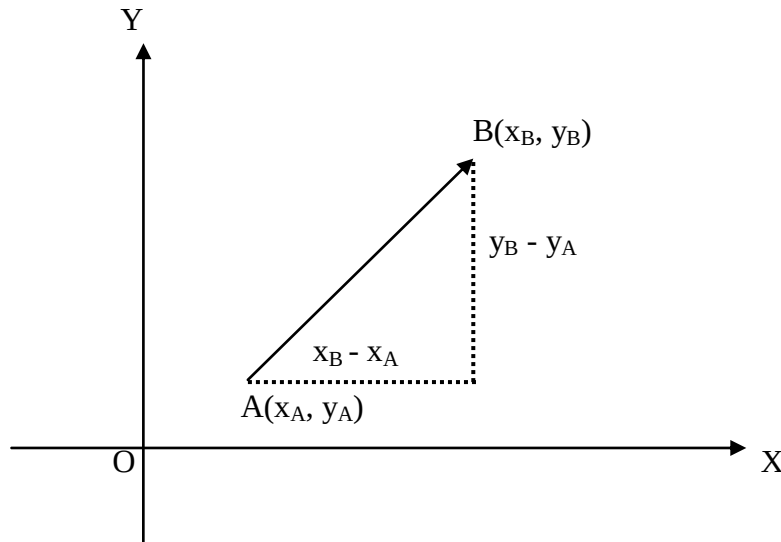


Gambar 2.5. Vektor Pada Bidang Koordinat

Pada gambar 2.5. terdapat suatu vektor yang titik pangkalnya di A (x_1, y_1) dan titik ujungnya di B (x_2, y_2).

B. Komponen Vektor

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horizontal (gerakan ke kanan/kiri) dan komponen vertikal (gerakan ke atas/bawah).



Gambar 2.6. Komponen Vektor

Komponen horizontal vektor $\vec{AB}$ sebesar $x_B - x_A$, sedangkan komponen vertikal vektor $\vec{AB}$ sebesar $y_B - y_A$.

Vektor dalam bidang datar juga dapat dinyatakan dalam bentuk :

- Kombinasi linear vektor satuan i, j , $= xi + yj$.
- Koordinat kartesius, yaitu : (a_1, a_2) .
- Koordinat kutub.

C. Vektor Basis

Tinjaulah sistem koordinat tegak lurus OXY dalam bidang dan P dan Q titik-titik dengan koordinat $P(x, 0)$ dan $Q(0, y)$, vektor basis i dan j didefinisikan sebagai berikut: vektor i panjangnya satu arah searah sumbu x positif dan vektor j panjangnya satu searah dengan sumbu y positif. Maka vektor $\vec{OP} = xi$ dan vektor

$\overrightarrow{OQ} = yj$. Untuk setiap sembarang titik $P(x,y)$ pada sistem koordinat, maka vektor $\overrightarrow{QP} = xi + yj$.

D. Besaran Vektor

Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar (panjang) dan arah dan digambarkan sebagai segmen garis berarah. Besar vektor dinyatakan dengan panjang segmen garis berarah. Contoh dari besaran vektor, antara lain: gaya, kecepatan, percepatan dan sebagainya.

Perhatikan gambar di atas, besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overrightarrow{AB}$. Berdasarkan Teorema Pythagoras maka panjang $\overrightarrow{AB}$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$|\overrightarrow{AB}| = (\text{komponen horizontal})^2 + (\text{komponen vertikal})^2$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Contoh 1.

Jika $A(4,-8)$ dan $B(-1,4)$, maka besar (panjang) vektor AB adalah

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (4 - (-8))^2}$$

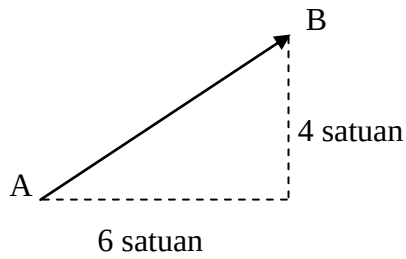
$$|\overrightarrow{AB}| = 13$$

E. Menggambar Vektor

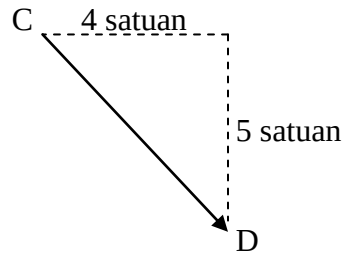
Sebaliknya, jika diberikan komponen – komponen vektor maka kita dapat menggambar vektor yang dimaksud pada bidang datar atau bidang kordinat cartesius.

Contoh:

Vektor $AB = \langle 6, 4 \rangle$ berarti dari titik A melangkah 6 satuan ke kanan dan 4 satuan ke atas. Vektor $CD = \langle 4, -5 \rangle$ berarti dari titik C melangkah 4 satuan ke kanan dan 5 satuan ke bawah.



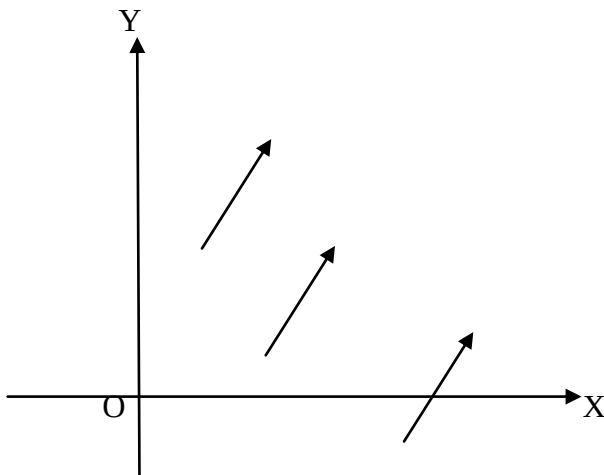
Gambar 2.7. Vektor $\overrightarrow{AB}$



Gambar 2.8. Vektor $\overrightarrow{CD}$

Kesamaan Dua Atau Lebih Vektor

Dua atau lebih vektor dikatakan sama apabila keduanya mempunyai besar (panjang) dan arah yang sama. Perhatikan gambar berikut ini:

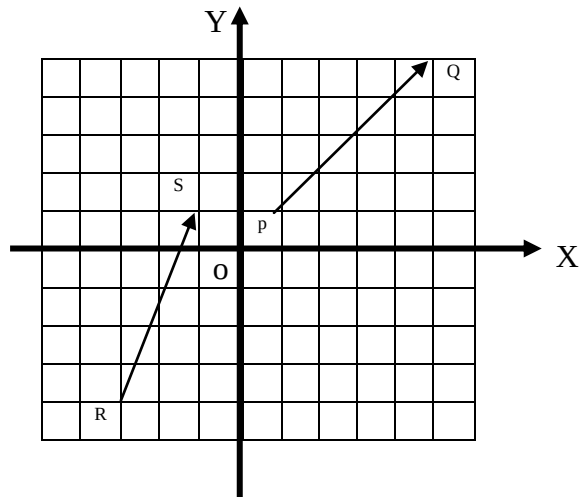


Gambar 2.9. Vektor-Vektor Yang Sama

Ketiga vektor pada gambar di atas adalah sama karena mempunyai besar (panjang) dan arah yang sama.

Contoh 1:

Diketahui vektor titik-titik P(1, 1), Q(4, 5), R(-4, -3), S(-1, 1)

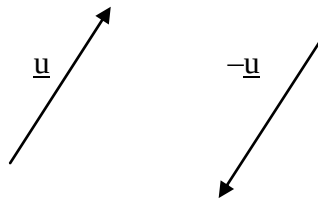


$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, karena $\overrightarrow{PQ}$ searah dengan $\overrightarrow{RS}$ dan $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RS}|$

Gambar 2.10. Vektor-Vektor Pada Bidang

Vektor Negatif

Vektor yang besarnya sama dengan vektor $\underline{u}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negative dari $\underline{u}$ dan ditulis sebagai $-\underline{u}$. perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 2.11. Vektor dan Negatif Vektor

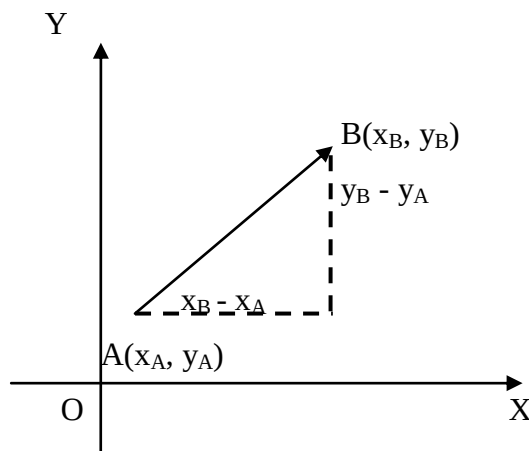
Jelas bahwa jika komponen vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ maka komponen $-\underline{u} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

A. Vektor Nol

Yang dimaksud vektor nol adalah vector yang besarnya nol atau tidak mempunyai panjang (berupa titik). Vektor nol tidak mempunyai arah tertentu. Vektor nol dilambangkan dengan $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pada koordinat bidang cartesius, vektor nol adalah titik $O(0,0)$.

B. Modulus Vektor

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horizontal (searah sumbu X) dan komponen vertikal (searah sumbu Y).Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.12. Modulus Vektor

Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang horizontal sebesar $x_B - x_A$, sedangkan komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang vertikal sebesar $y_B - y_A$.

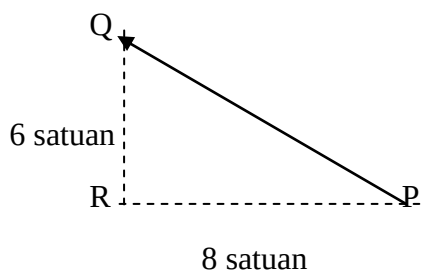
Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overrightarrow{AB}$ dan disebut modulus vektor $\overrightarrow{AB}$. Berdasarkan Teorema Pythagoras maka panjang $\overrightarrow{AB}$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$|\overrightarrow{AB}| = (\text{komponen horizontal})^2 + (\text{komponen vertikal})^2$$

$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Contoh:

Vektor $\overrightarrow{PQ} = (-8, 6)$ dapat digambar dari titik pangkal P ke kiri 8 satuan dan ke atas 6 satuan sebagaimana berikut.



Gambar 2.13. Vektor $\overrightarrow{PQ}$

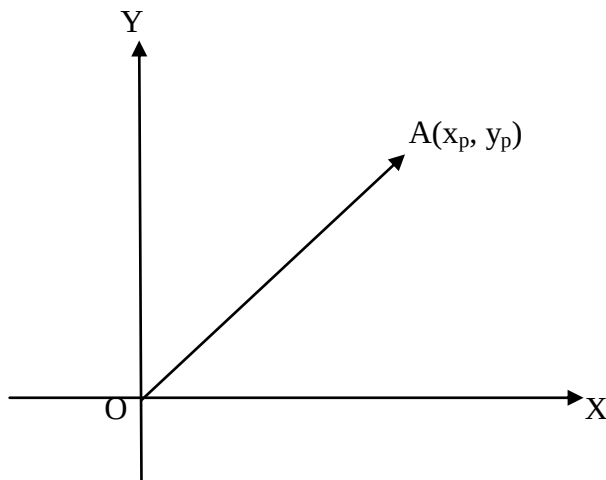
karena PRQ merupakan segitiga siku-siku di R, maka berlaku

$$\overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{PR}^2 + \overrightarrow{RQ}^2$$

$$\overrightarrow{PQ}^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{PQ}| = 10.$$

C. Vektor Posisi

Pada bidang koordinat cartesius, setiap titik A pada bidang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OA}$. Vektor $\overrightarrow{OA}$ disebut vektor posisi dari titik A. Koordinat titik A merupakan komponen-komponen vektor $\overrightarrow{OA}$. Perhatikan gambar dibawah ini:



Pada gambar di samping vektor posisi OA mempunyai Komponen horizontal x_p dan Komponen vertikal y_p.

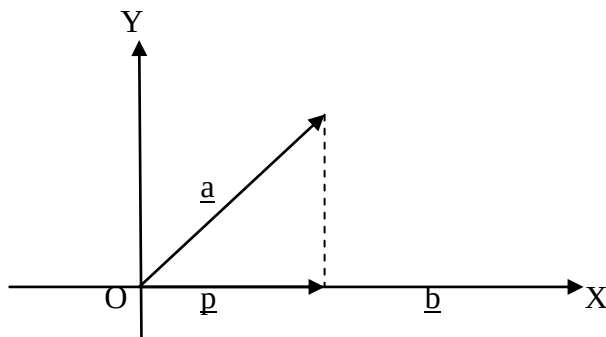
Gambar 2.14. Vektor Posisi $\overrightarrow{OA}$

D. Proyeksi Ortogonal

Proyeksi skalar atau panjang proyeksi dari $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah $|\vec{p}|$ yang nilainya sama dengan harga mutlak $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ atau $|\vec{p}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$

Proyeksi vektor atau proyeksi orthogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah $\vec{p} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$

Bukti:



Gambar 2.15. Proyeksi Ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Pada gambar segitiga di atas, $\cos \theta = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{a}|} \dots\dots (1)$

Sedangkan rumus perkalian scalar dua vector $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \dots\dots(2)$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh: $\begin{cases} \cos \theta = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{a}|} \\ \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \end{cases}$ maka

$$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \text{ (dengan mencoret penyebut } |\vec{a}| \text{)}$$

Didapat $|\vec{p}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ karena $|\vec{p}|$ adalah panjang vector, maka nilainya harus positif,

jadi $|\vec{p}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$ Terbukti

Sedangkan vektornya $\vec{p}$ searah dengan $\vec{b}$ sehingga dapat dikatakan bahwa vektor $\vec{p}$ kelipatan dari vektor $\vec{b}$.

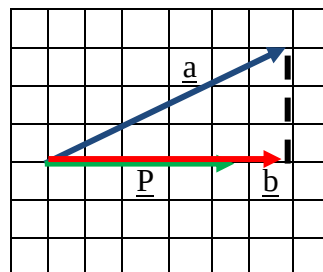
$\vec{p} = k \vec{b}$ dimana $k = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{b}|}$ jadi $\vec{p} = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{b}|} \times \vec{b}$ dengan mensubstitusikan $|\vec{p}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ didapat

$\vec{p} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$ Terbukti.

Contoh:

Pada gambar di samping, tentukan

- Panjang proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$
- Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$



Gambar 2.16. Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Penyelesaian:

Secara Geometris

- Proyeksikan vektor $\vec{a}$ (biru) ke vektor $\vec{b}$ (merah).
- Hasil proyeksinya adalah vektor $\vec{p}$
- Jadi panjang proyeksinya $|\vec{p}| = 5$ dan proyeksi vektornya $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Secara aljabar

vektor $\vec{a}$ berarah ke kanan 5 satuan dan ke atas 2 satuan

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dan } |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Vektor $\vec{b}$ berarah ke kanan 6 satuan dan ke atas 0 satuan maka

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } |\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$$

$$\text{Panjang proyeksinya } |\vec{p}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{6} \right| = 5$$

$$\text{Proyeksi vektor nya } \vec{p} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{6^2} \right) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E. Vektor Satuan

Vektor yang mempunyai panjang (modulus) 1 satuan disebut vektor satuan. Vektor satuan dilambangkan dengan $\hat{a}$.

Contoh:

Diketahui $\underline{a} = \langle 1, 0 \rangle$, tunjukkan apakah $\underline{a}$ merupakan vektor satuan??

Vektor $\underline{a}$ adalah vektor satuan karena panjang (modulus) $\underline{a} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

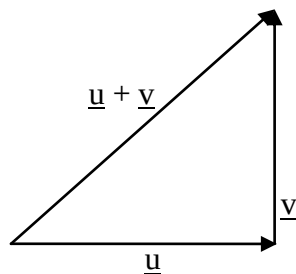
Maka kita dapat menentukan vektor satuan yg searah dengan vektor $\underline{a}$ menurut

rumus adalah $\hat{a} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \langle \frac{1}{1}, \frac{0}{1} \rangle$,

G. Operasi Pada Vektor

1. Penjumlahan Vektor

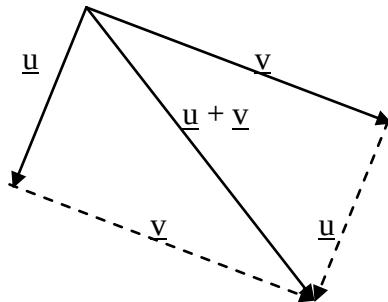
Misalkan $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah vektor-vektor yang berada di ruang yang sama, maka vektor $\underline{u} + \underline{v}$ didefinisikan sebagai berikut.



Gambar 2.17. Penjumlahan Vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$.

Untuk menggambar jumlah dua vektor, dapat dilakukan dengan cara seperti di atas yaitu menghimpit ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal pertama dan ujung vektor kedua. Cara ini disebut *aturan segitiga*.

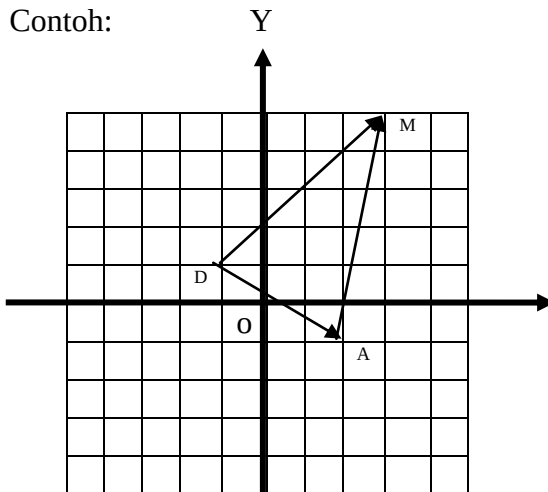
Selain itu dapat juga dilakukan dengan menghimpit pangkal kedua vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$. jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisinya adalah $\underline{u}$ dan $\underline{v}$. cara ini disebut *aturan jajargenjang*. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.18. Penjumlahan dengan Jajargenjang

Pada bidang koordinat kartesius, penjumlahan dua vektor lebih mudah menggunakan *aturan segitiga*.

Contoh:



Gambar 2.19. Penjumlahan Vektor

Pada gambar diatas, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DM}$

Jika $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Maka dengan menjumlahkan dengan cara matriks yaitu

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DM}$$

Perhatikan, untuk menentukan komponen horizontal dan vertikal dari vektor hasil penjumlahan diperoleh dari menjumlahkan masing-masing komponen.

Secara umum, jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$

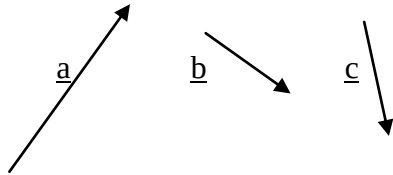
Contoh:

Diketahui $\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ maka berapa jumlah $\underline{a} + \underline{b}$ adalah

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Contoh:

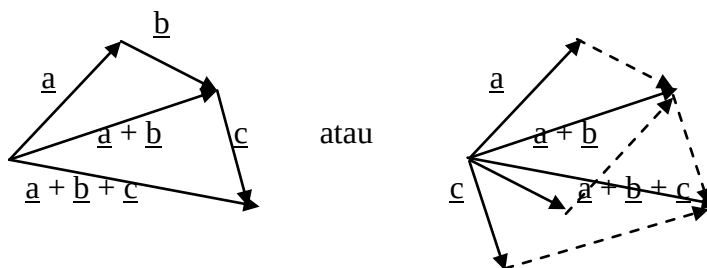
Diketahui $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ sebagai berikut:



Gambar 2.20. Vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$

Tentukan resultan dari vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ tersebut

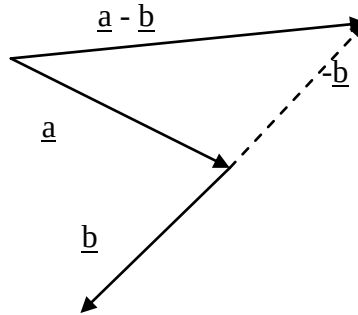
resultan dari vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ dapat ditentukan dengan menggunakan aturan segitiga dan aturan jajargenjang.



Gambar 2.21. Resultan vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$

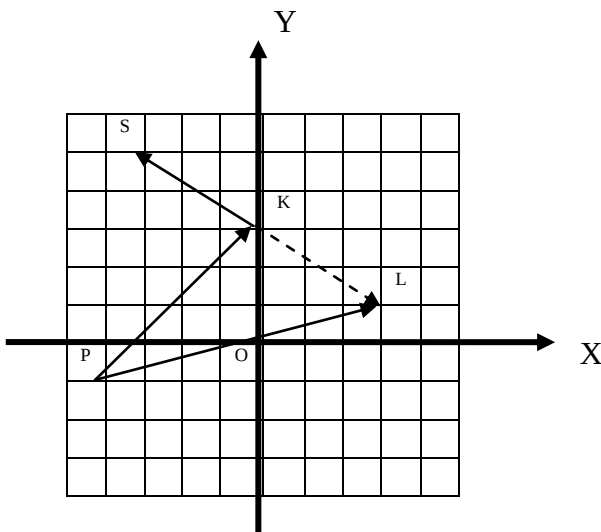
2. Selisih Vektor

Selisih atau pengurangan adalah lawan dari penjumlahan. Menghitung selisih dua vektor sama artinya dengan menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$. perhatikan gambar berikut ini,



Gambar 2.22. Selisih Vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$

Selisih dua vektor juga dapat digambarkan pada bidang koordinat cartesius



Gambar 2.23. Selisih Dua Vektor

Pada gambar di atas $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KS}$ sehingga $\overrightarrow{PK} - \overrightarrow{KS} = \overrightarrow{PK} - \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{PL}$

$$\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{KS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Perhatikan, untuk menentukan komponen horizontal dan vertikal dari selisih dua vektor diperoleh dari selisih masing-masing komponen.

Secara umum, jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka $\underline{u} - \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$

Sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $a + b = c$ jika dan hanya jika $b = c - a$
4. $a + 0 = a$, $a - a = 0$
5. $k(sb) = (ks)b = b(ks)$
6. $k(a + b) = ka + kb$
7. $(k + s)a = ka + sa$
8. $1a = a$

Contoh:

Diketahui $\underline{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ maka berapa jumlah $\underline{a} - \underline{b}$ adalah

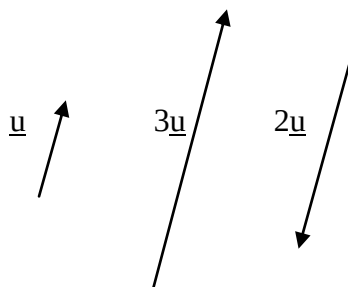
$$\underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Hasil Kali Vektor Dengan Skalar

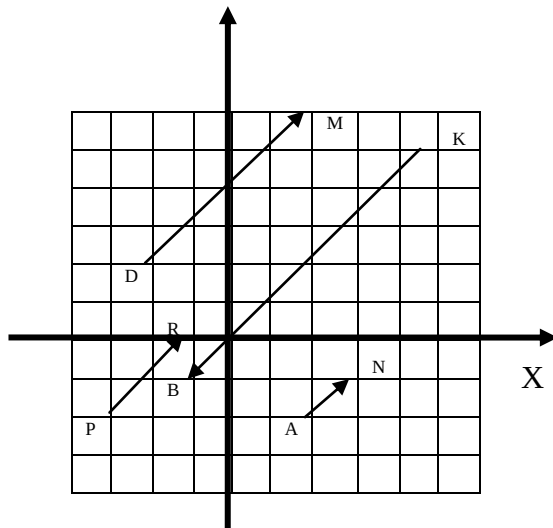
Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mengenal besaran vektor yaitu besaran yang memiliki besar (panjang) dan arah. Selain itu ada besaran lain yang hanya memiliki besar misalnya: jarak, waktu, massa dan sebagainya. Besaran yang hanya memiliki besar disebut besaran scalar. Adapun bilangan yang kita gunakan untuk mengukur besaran scalar disebut scalar.

Vektor dapat dioperasikan dengan scalar. Karena scalar hanya mempunyai besar maka perkalian vektor dengan scalar hanya akan berpengaruh pada besar vektor saja, sedangkan arahnya tetap.

Hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan scalar 2 akan menghasilkan vektor dengan besar 2 kalinya sedangkan arahnya tetap. Secara umum, hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan scalar n akan menghasilkan vektor $n\underline{u}$ yang besarnya n kali besar $\underline{u}$ dan arahnya sama dengan $\underline{u}$ bila n positif dan berlawanan arah $\underline{u}$ bila n negative. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.24. Hasil kali Vektor Dengan Skalar



Pada gambar di samping

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= 2 \overrightarrow{PR} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KB} &= -3 \overrightarrow{PR} \\ &= -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PR} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gambar 2.25. Hasil kali Vektor dan Skalar

Secara umum, jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ maka $n \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} n \cdot a_1 \\ n \cdot a_2 \end{pmatrix}$

4. Hasil Kali Titik Dua Vektor (Dot Product)

Dua operasi pada vektor, penjumlahan, pengurangan dan perkalian skalar akan menghasilkan vektor. Pada pembahasan ini kita akan mempelajari operasi vektor keempat yaitu hasil kali titik. Hasil kali titik merupakan operasi antara dua buah vektor pada ruang yang sama yang menghasilkan skalar. Oleh karena itu, hasil kali titik sering disebut juga sebagai hasil kali skalar (hasil kali dalam).

Hasil kali titik $\underline{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\underline{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ adalah $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

Sifat-sifat hasil kali titik

- $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$
- $c(\underline{u} \cdot \underline{v}) = c \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot c \underline{v}$
- $\underline{0} \cdot \underline{v} = 0$
- $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$

Misalkan a, b adalah vektor pada ruang yang sama, maka hasil kali titik antara dua vector jika diketahui sudut nya adalah

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha$$

dimana

$\|\mathbf{a}\|$ = panjang a

$\|\mathbf{b}\|$ = panjang b

α = sudut antara keduanya

Contoh:

1. Diketahui $\underline{u} = \langle 2, -2 \rangle$, $\underline{v} = \langle 5, 8 \rangle$, tentukan $\underline{a} \bullet \underline{b}$

Penyelesaian:

$$\underline{a} \bullet \underline{b} = \langle 2, -2 \rangle \bullet \langle 5, 8 \rangle = 10 + (-16) = -6$$

2. Tentukan hasil kali titik dari dua vector $\underline{a} = 2i - 6j$ dan $\underline{b} = 2i + 2j$

Penyelesaian:

$$\underline{a} \bullet \underline{b} = (2i - 6j) \bullet (2i + 2j) = 4 + (-12) = -8$$

Rangkuman:

1. Besaran yang mempunyai arah dan besar dinamakan vektor.
2. Vektor yang titik pangkalnya di A (x_1, y_1) dan titik ujungnya di B (x_2, y_2). mempunyai komponen horizontal sebesar $x_B - x_A$, sedangkan komponen vertikal sebesar $y_B - y_A$.
3. Untuk setiap sembarang titik P(x,y) pada sistem koordinat, maka vektor $\overrightarrow{OP} = xi + yj$.
4. Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overrightarrow{AB}$ panjang $\overrightarrow{AB}$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= (\text{komponen horizontal})^2 + (\text{komponen vertikal})^2 \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$

5. Dua atau lebih vektor dikatakan sama apabila keduanya mempunyai besar (panjang) dan arah yang sama.
6. Vektor yang besarnya sama dengan vektor $\underline{u}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negative dari $\underline{u}$ dan ditulis sebagai $-\underline{u}$.
7. Vektor nol adalah vector yang besarnya nol atau tidak mempunyai panjang (berupa titik).
8. Proyeksi vektor atau proyeksi orthogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah $\vec{p} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$
9. Vektor yang mempunyai panjang (modulus) 1 satuan disebut vektor satuan dan dilambangkan dengan $\hat{a}$.
10. Menjumlahkan dua vektor, dapat dilakukan dengan cara menghimpit ujung vektor pertama dengan pangkal vector kedua, hasilnya adalah vektor dengan

pangkal pertama dan ujung vektor kedua yang disebut *aturan segitiga atau* dengan menghimpit pangkal kedua vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$. jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ disebut *aturan jajargenjang*.

11. Menghitung selisih dua vektor sama artinya dengan menjumlahkan vektor pertama dengan negatif vektor kedua. Dengan demikian $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$.
12. Hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan scalar n akan menghasilkan vektor $n.\underline{u}$ yang besarnya n kali besar $\underline{u}$ dan arahnya sama dengan $\underline{u}$ bila n positif dan berlawanan arah $\underline{u}$ bila n negatif.
13. Misalkan a, b adalah vektor pada ruang yang sama, maka hasil kali titik antara dua vector jika diketahui sudut nya adalah

$$\underline{a} \bullet \underline{b} = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| \cos \alpha$$

SOAL-SOAL:

1. Sketsa vektor-vektor berikut ini dengan titik pangkal vektor pada titik asal.

a. $\langle 3, -4 \rangle$	b. $\langle 0, -6 \rangle$
c. $\langle -4, 5 \rangle$	d. $\langle -5, -5 \rangle$
2. Tentukan komponen-komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ berikut.

a. A(3, 5), B(2, 8)	b. (7, -2), B (0, 0)
c. (-6, -2), B(-4, -1)	d. -8, -1), B(-3, -2)
3. Jika $\underline{u} = \langle 1, 3 \rangle$, $\underline{v} = \langle 2, 1 \rangle$ dan $\underline{w} = \langle 4, -1 \rangle$ maka tentukan:

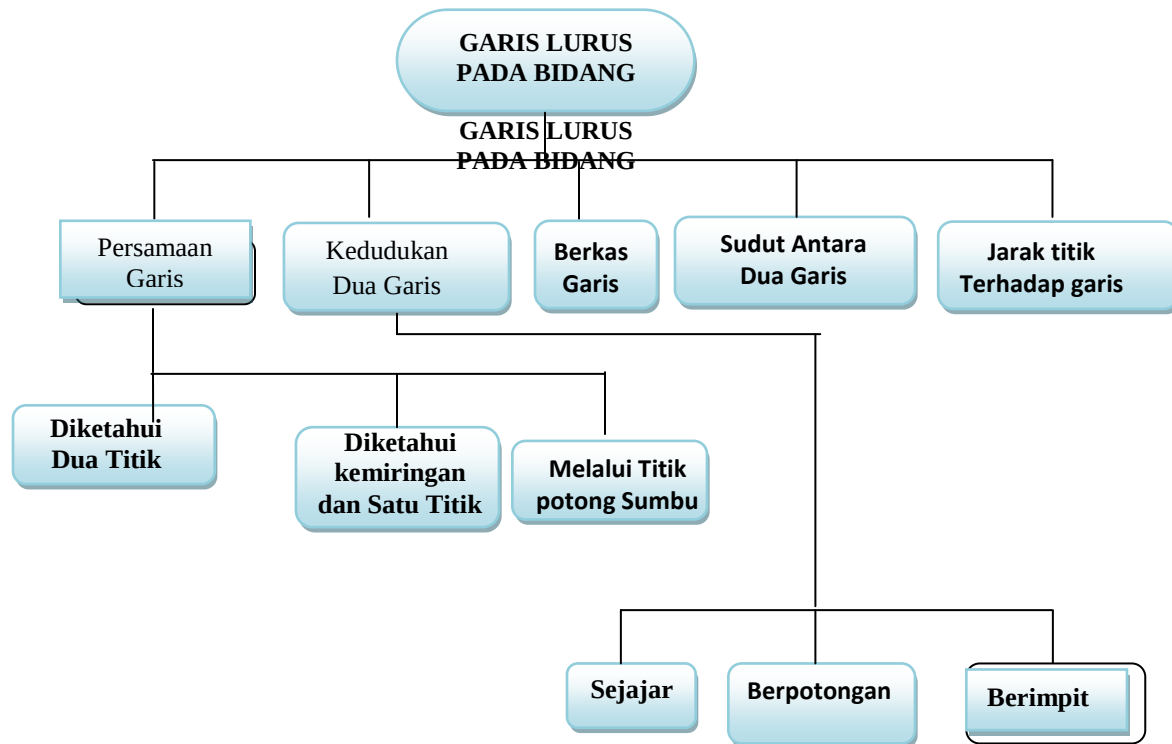
a. $\underline{u} - \underline{w}$	d. $7\underline{v} + 3\underline{w}$
b. $-\underline{w} + \underline{v}$	e. $3(\underline{u} - 7\underline{v})$
c. $-3\underline{v} - 8\underline{w}$	f. $2\underline{v} - (\underline{u} + \underline{w})$
4. Hitung besar vektor $\underline{v}$ berikut, jika

a. $\underline{v} = \langle 3, -4 \rangle$	b. $\underline{v} = -3\underline{j}$
c. $\underline{v} = -\underline{i} + 7\underline{j}$	d. $\underline{v} = \sqrt{2}\underline{i} - \sqrt{7}\underline{j}$

5. Misalkan $u = \langle -1, 1 \rangle$, $v = \langle 0, 1 \rangle$ dan $w = \langle 3, 4 \rangle$. Tentukan vektor x yang memenuhi $u - 2x = x - w + 3v$.
6. Misalkan $u = 2i - j$ dan $v = 4i + 2j$. Tentukan skalar c_1 dan c_2 sedemikian sehingga $c_1 u + c_2 v = -4j$.
7. Misalkan $v = 4i - 3j$. Tentukan semua skalar k sedemikian sehingga $\|kv\| = 3$.
8. Tentukan sebuah vektor dengan panjang 1 yang mempunyai arah yang sama dengan $-i + 4j$.
9. Tentukan dua vektor satuan yang sejajar dengan garis $y = 3x + 2$.
10. Tentukan sebuah vektor satuan yang membentuk sudut 135° dengan sumbu x .
11. Tentukan:
 - a. Tentukan sebuah vektor satuan yang membentuk sudut $\pi/3$ dengan sumbu x positif.
 - b. Tentukan sebuah vektor dengan panjang 4 yang membentuk sudut $3\pi/4$ dengan sumbu x positif.
12. Gunakan sifat-sifat vektor untuk menghitung panjang diagonal jajargenjang yang ditentukan sisi-sisi $i + j$ dan $i - 2j$.
13. Gunakan sifat-sifat vektor untuk menentukan titik yang keempat dari jajargenjang jika tiga titik yang laian adalah $(0, 0)$, $(1, 3)$ dan $(2, 4)$. [Bisa lebih dari satu jawaban].
14. Gunakan sifat-sifat vektor untuk membuktikan bahwa ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari dua sisi sebuah segitiga sejajar dan panjangnya sama dengan setengah sisi yang ketiga.

BAB III

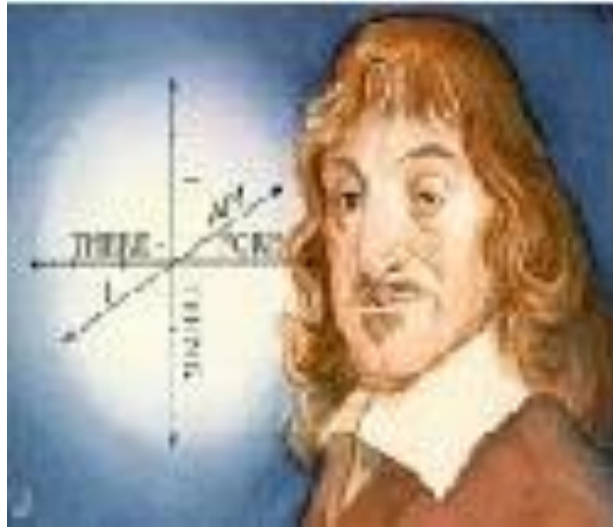
GARIS LURUS PADA BIDANG



Gambar 3.1. Peta Konsep Garis Lurus

Sejarawan Matematika

1. RENE DESCARTES



Descartes adalah orang yang pertama kali menggunakan sistem dua atau tiga bilangan seperti (A, B) atau (A, B, C) sebagai koordinat untuk menggambarkan titik-titik pada suatu bidang atau dalam ruang. Dengan cara ini pernyataan-pernyataan mengenai gambar-gambar dalam geometri tentang titik yang dijabarkan oleh Euclides dapat diterjemahkan menjadi pernyataan-pernyataan yang menyangkut bilangan, titik-titik dalam ruangan dengan (A, B, C) , menggunakan huruf-huruf abjad seperti $a, b, c, \dots, x, y, z$

Bagian paling menarik dari filosofi Descartes adalah caranya dia memulai sesuatu. Meneliti sejumlah besar pendapat-pendapat yang keliru yang umumnya sudah disepakati orang, Descartes berkesimpulan untuk mencari kebenaran sejati dia mesti mulai melakukan langkah yang polos dan jernih. Untuk itu, dia mulai dengan cara meragukan apa saja, apa saja yang dikatakan gurunya. Meragukan kepercayaan meragukan pendapat yang sudah berlaku, meragukan eksistensi alam di luar dunia, bahkan meragukan eksistensinya sendiri.

Sedikitnya ada lima ide Descartes yang punya pengaruh penting terhadap jalan pikiran Eropa: (a) pandangan mekanisnya mengenai alam semesta; (b) sikapnya yang positif terhadap penajagan ilmiah; (c) tekanan yang diletakkannya pada penggunaan matematika dalam ilmu pengetahuan; (d) pembelaannya terhadap dasar awal sikap skeptis; dan (e) penitikpusatan perhatian terhadap epistemologi. Menyimpulkan arti penting keseluruhan Descartes, penemuan ilmiahnya yang mengesankan, khusus penemuannya tentang geometri analitis.

2.EUCLID



Euclid dikenal sebagai Euclid dari Alexandria, Mesir adalah seorang matematikawan Yunani, sering disebut sebagai "Bapak Geometri". Elements adalah salah satu karya paling berpengaruh dalam sejarah matematika, digunakan sebagai buku teks utama untuk mengajar matematika (terutama geometri) dari waktu publikasi sampai akhir abad 19 atau awal abad ke-20. Dalam Elemen, Euclid menyimpulkan prinsip-prinsip apa yang sekarang disebut geometri Euclidean dari satu set kecil aksioma. Euclid juga menulis karya-karya pada perspektif, irisan kerucut, geometri bola, teori nomor dan kekakuan . "Euclid" adalah versi yang diInggriskan dari bahasa Yunani yakni Εὐκλείδης , yang berarti ""Good Glory". **Kehidupan awal**

Euclid mengemukakan teori bilangan dan geometri. Menurutnya satu hal yang paling penting untuk dicatat, bahwa dalam pembuktian teorema-teorema geometri tak diperlukan adanya contoh dari dunia nyata tetapi cukup dengan deduksi logis menggunakan aksioma-aksioma yang telah dirumuskan.

Euclide menyatakan aksioma (pernyataan-pernyataan sederhana) dan membangun semua dalil tentang geometri berdasarkan aksioma-aksioma tersebut. Contoh dari aksioma Euclides adalah, "Ada satu dan hanya satu garis lurus garis lurus, di mana garis lurus tersebut melewati dua titik". Buku-buku karangannya menjadi hasil karya yang sangat penting dan menjadi acuan dalam pembelajaran Ilmu Geometri.

A. Persamaan Garis Lurus

Suatu garis lurus adalah suatu kurva geometrik yang paling sederhana. Secara unik dapat disusun dari dua titik yang terletak pada satu garis atau dari kemiringan garis dan salah satu titik yang terletak pada garis tersebut.

Persamaan umum suatu garis lurus (yang tidak sejajar sumbu) adalah $y = ax + b$ dengan a koefisien arah yang sama dengan kemiringan garis atau tangen α (α sudut yang dibentuk oleh garis dengan sumbu X^+) dan $0 \leq \alpha < 180^\circ$. Sedangkan $|b|$ adalah jarak dari titik asal O terhadap titik potong garis dengan sumbu Y .

Dalam bentuk implisit, persamaan garis dinyatakan dengan $ax + by + c = 0$ dengan a , b dan c konstanta dan salah satu atau keduanya dari a dan b bukan nol. Disini koefisien arahnya $-\frac{a}{b}$ (hanya boleh, jika $b \neq 0$).

Kemungkinan-kemungkinan lain adalah:

- $y = ax$ (suatu garis yang melalui titik asal, karena $b = 0$).
- $y = b$ ($a = 0$ atau $\tan \alpha = 0$ yang berarti $\alpha = 0^\circ$. Dalam hal ini garis sejajar sumbu X).
 $x = c$ (c bilangan tetap. Garis sejajar sumbu Y).
- $x = 0$ yang merupakan sumbu Y .
- $y = 0$ yang merupakan sumbu X .

1. Persamaan Garis jika diketahui dua titik

Salah satu sifat azasi dari suatu garis lurus adalah bahwa kemiringannya konstan. Kemiringan suatu garis adalah tangens dari sudut kemencengannya yang dapat ditentukan dengan menggunakan dua titik yang terletak pada garis lurus tersebut. Apabila (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah dua titik yang terletak pada suatu garis lurus yang tidak vertikal, maka kemiringan m dari suatu

garis ditentukan dengan: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Apabila (x, y) adalah titik lain yang terletak pada garis maka kemiringan dari garis tersebut adalah

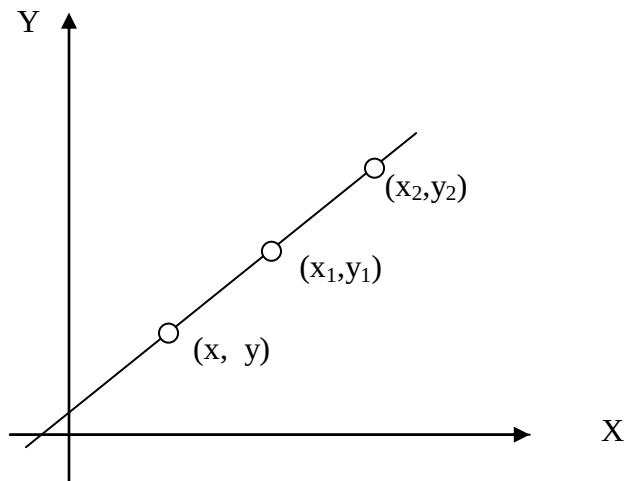
$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Karena kemiringan konstan, maka $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Atau

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \dots\dots\dots 1)$$

yang merupakan persamaan garis yang melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) .



Gambar 3.2. Garis Melalui Dua Titik

2. Persamaan Garis Jika Diketahui Kemiringan Dan Satu Titik Pada Garis

Karena kemiringan garis adalah $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ maka persaman 1) dapat ditulis kembali sebagai berikut.

$$y - y_1 = m (x - x_1) \dots\dots\dots 2)$$

Persamaan 2) adalah persamaan suatu garis, apabila salah satu titik yang terletak pada garis tersebut serta kemiringannya diketahui.

3. Persamaan Garis Melalui Titik Potong Sumbu

Untuk kasus khusus apabila (x_1, y_1) adalah titik potong sumbu Y katakanlah $(0, b)$ dimana $b \neq 0$, serta titik (x_2, y_2) adalah titik potong sumbu X, katakanlah $(a, 0)$ dimana $a \neq 0$, maka persamaan 1) dapat dituliskan

$$y - b = \frac{-b}{a}(x - 0)$$

$$\frac{y}{b} - 1 = -\frac{x}{a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \dots\dots\dots 3)$$

Persamaan 3)) membuktikan bahwa pembentukan suatu persamaan garis lurus dapat dilakukan dengan menggunakan *dua titik potong sumbu*, apabila kedua titik potong diketahui.

☞ Contoh

1. Persamaan garis yang melalui titik $(3, 4)$ dan $(-5, 2)$

$$y - 4 = \frac{2 - 4}{-5 - 3} (x - 3)$$

$$y - 4 = \frac{1}{4} (x - 3)$$

$$x - 4y + 13 = 0$$

2. Persamaan garis yang mempunyai titik potong sumbu $(0, -6)$ dan $(4, 0)$ adalah

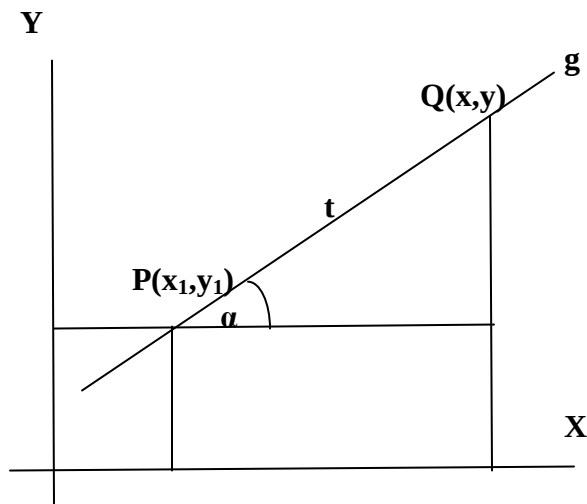
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1$$

Diperoleh $-6x + 4y = -24$ atau $3x - 2y - 12 = 0$.

3. Persamaan garis yang melalui titik $(-1, 2)$ dan kemiringan -4 adalah

$$y - 2 = -4(x + 1) \text{ atau } 4x + y + 2 = 0.$$

4. Persamaan Parameter Garis



Untuk setiap titik pada g yang ditentukan oleh titik P dan koefisien arahnya, berlaku

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cos \alpha \\ y = y_1 + t \sin \alpha \end{cases}$$

Persamaan simultan ini disebut persamaan parameter suatu garis lurus dengan t adalah parameter.

Gambar 3.3. Persamaan Parameter Garis

B. Kedudukan Dua Garis Lurus

Jika dua garis berada disuatu bidang, maka keduanya dapat berpotongan, sejajar atau berimpit. Garis yang berpotongan dengan sudut 90° , disebut siku-siku. Dua garis disebut sejajar apabila mempunyai sudut inklinasi yang sama, dan karenanya mempunyai kemiringan yang sama, begitu pula sebaliknya. Dua garis siku-siku satu sama lain jika mempunyai kemiringan yang berlawanan tanda.

Harus dicatat bahwa dua garis yang sejajar (Tegak Lurus) dengan koordinat sumbu, maka keduanya tegak lurus satu dengan yang lain. Kemiringan garis yang satu nol, yang lain tidak terbatas.

Jika persamaan kedua garis lurus dinyatakan dengan

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \text{ dengan } A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 \text{ dan } C_2 \text{ sebagai bilangan-bilangan tetap.}$$

Pada kedua persamaan di atas terdapat dua besaran x dan y. Untuk menghitung x dan y, kalikan persamaan I dengan B_2 dan persamaan II dengan B_1 . Kurangi I dan II, diperoleh

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) x = B_1 C_2 - B_2 C_1 \dots\dots\dots(1)$$

I. **Jika $(A_1 B_2 - A_2 B_1) x \neq 0$ atau $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$** , maka ada harga x yang tunggal. Analog terdapat harga y tunggal. Jadi ada penyelesaian yang tunggal untuk x dan y. Pasangan bilangan ini merupakan titik potong kedua garis.

Persamaan $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ disebut tak bergantung.

II. **$(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0$ atau $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$** .

a) $B_1 C_2 - B_2 C_1 \neq 0$ atau $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Persamaan (1) menjadi $0 x \neq 0$, yang tidak menghasilkan harga x. Karena itu kedua persamaan tidak mempunyai penyelesaian.

Susuna, persamaan $(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2})$ disebut berlawanan. Grafik kedua persamaan ini tidak mempunyai titik sekutu atau kedua garis **sejajar**.

b) $B_1 C_2 - B_2 C_1 = 0$ atau $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ Persamaan (1) menjadi $0x = 0$ yang merupakan suatu identitas. Banyak sekali harga x yang memenuhi. Karena itu kedua persamaan mempunyai banyak sekali penyelesaian.

Susunan persamaan $(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2})$ dinamakan bergantung.

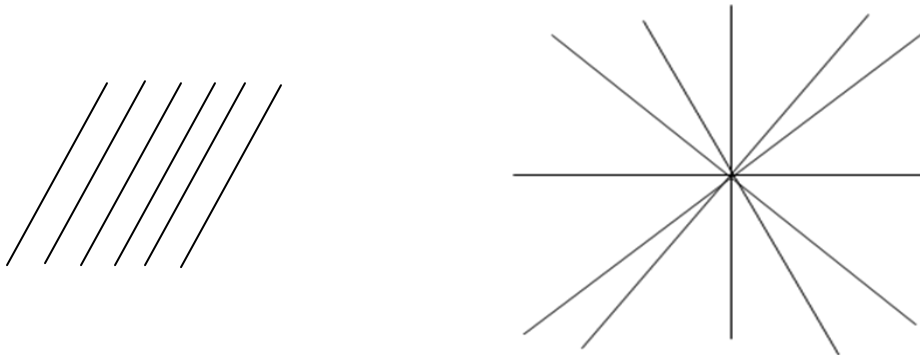
Grafik kedua persamaan itu mempunyai banyak sekali titik persekutuan atau kedua garis berimpit.

☞ Contoh:

1. Garis $2x + 6y - 4 = 0$ berimpit dengan garis $4x + 12y - 8 = 0$ dan $y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}$.
2. Garis $x + 3y - 9 = 0$ sejajar dengan $y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}$.
3. Garis $2x + y - 4 = 0$ berpotongan dengan $y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}$.

C. Berkas Garis

Pada dasarnya kedudukan garis lurus pada suatu bidang datar ada dua hal. Hal pertama adalah parallel dan yang kedua adalah berpotongan. Bila banyaknya garis lurus tidak hanya dua, maka garis-garis lurus tadi (bila semuanya parallel) maka akan membentuk sebuah berkas garis lurus yang parallel. Berkas garis lurus yang parallel (type ke III). Selain itu bila garis-garis lurus tersebut mempunyai satu titik potong, maka garis-garis lurus tersebut akan membentuk suatu berkas.



Gambar 3.4. Berkas Garis Paralel Berkas Garis Berpotongan

Berkas garis lurus yang melalui satu titik (tipe 1). Berkas garis lurus yang berpotongan disatu titik akan kita sebut berkas garis lurus tipe I dan yang parallel akan kita sebut berkas garis lurus tipe II. Namun demikian pada dasarnya persamaan berkas garis lurus memiliki satu bentuk. Bila L_1 garis lurus pertama dan L_2 adalah garis lurus kedua dengan persamaan-persamaannya :

$$L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

Maka persamaan berkas garis lurus adalah :

$$L_1 + \lambda L_2 = 0 \leftrightarrow A_1 + B_1 y + C_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

$$\leftrightarrow (A_1 + \lambda A_2) X + (B_1 + \lambda B_2) Y + C_1 + \lambda C_2 = 0$$

Dimana λ dapat memiliki nilai dari $-\infty$ sampai $+\infty$ dan λ disebut parameter. Dalam hal ini, koefisien x dan y keduanya tidak boleh serentak nol, sebab kalau keduanya nol menghasilkan

$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ ini bertentangan dengan perjanjian bahwa $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ atau dengan kata lain L_1

tidak sejajar dengan L_2 .

☞ Contoh:

1. Carilah persamaan garis melalui titik potong garis $2x - y + 2 = 0$ dengan garis $x + y = 4$ dan gradiennya $\frac{1}{2}$.

Penyelesaian :

$$g_1 : 2x - y + 2 = 0$$

$$g_2 : x + y - 4 = 0$$

maka persamaan berkas garis yang melalui g_1 dan g_2 adalah

$$g_1 + \lambda g_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 2 + \lambda(x + y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + \lambda)x + (-1 + \lambda)y + 2 - 4\lambda = 0 \dots\dots\dots*)$$

Karena gradien = $\frac{1}{2}$ maka $\frac{1}{2} = \frac{-(2 + \lambda)}{(-1 + \lambda)}$

$$\Leftrightarrow 2 - (2 + \lambda) = -1 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1$$

Substitusikan $\lambda = -1$ ke *) diperoleh $(2 + \lambda)x + (-1 + \lambda)y + 2 - 4\lambda = 0$

$$\text{atau } x - 2y + 6 = 0$$

Jadi persamaan garis yang melalui titik potong $2x - y + 2 = 0$ dan $x + y = 4$ dan gradien $\frac{1}{2}$ adalah $x - 2y + 6 = 0$.

2. Diketahui dua garis $y = x - 1$ dan $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik pangkal dan titik potong kedua garis.

Penyelesaian:

Persamaan berkas garis yang melalui kedua titik potong garis adalah

$$x - y - 1 + \lambda(-\frac{1}{2}x - y + 2) = 0 \dots\dots\dots**)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \frac{1}{2}\lambda)x - (1 + \lambda)y - (1 - 2\lambda) = 0.$$

Karena garis melalui titik pangkal maka $-(1 - 2\lambda) = 0$ atau $\lambda = \frac{1}{2}$.

Substitusi $\lambda = \frac{1}{2}$ ke **) diperoleh

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)y - \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0. \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y = 0 \\ \Leftrightarrow & y = \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

yang merupakan persamaan garis lurus yang melalui titik pangkal dan titik potong kedua garis.

D. Persamaan Normal Hesse

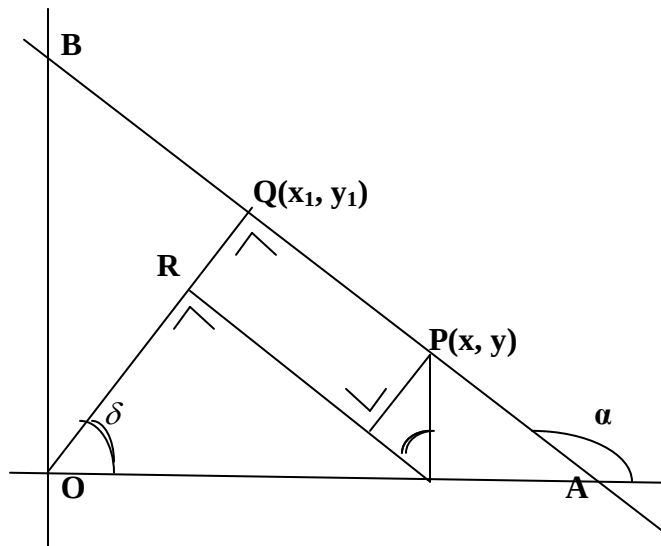
Perhatikan gambar 3.5.

Misalkan OQ = jarak dari O ke garis AB .
Maka untuk sebarang titik $P(x,y)$ pada garis berlaku:

$$\begin{aligned} OQ &= OR + RQ \\ &= x \cos \delta + y \sin \delta \end{aligned}$$

Jika $OQ = n$ maka persamaan di atas menjadi

$$x \cos \delta + y \sin \delta = n \text{*)}$$



Gambar 3.5. Persamaan Normal Hesse Garis AB

Hubungan tersebut merupakan persamaan garis lurus AB , yang ditentukan oleh jarak n dan sudut antara jarak tersebut dengan sumbu x positif.

Persamaan $Ax + By + C = 0$ dapat diubah ke dalam bentuk normal, dengan cara sebagai berikut. Kalikan persamaan dengan k , diperoleh

$$kAx + kBy + kC = 0 \text{**)}$$

Karena persamaan *) dan **) identik berarti $kA = \cos \delta$; $kB = \sin \delta$ dan $n = -kC$ dengan syarat $-kC$ positif.

$$k^2 A^2 + k^2 B^2 = \cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 1. \text{ Atau } k = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Sehingga bentuk normal dari $Ax + By + C = 0$ adalah

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 .$$

Tanda $\pm$ dipilih sedemikian sehingga $-kC$ positif.

☛ Contoh:

Tentukan jarak titik asal terhadap garis g : $24x + 7y - 25 = 0$.

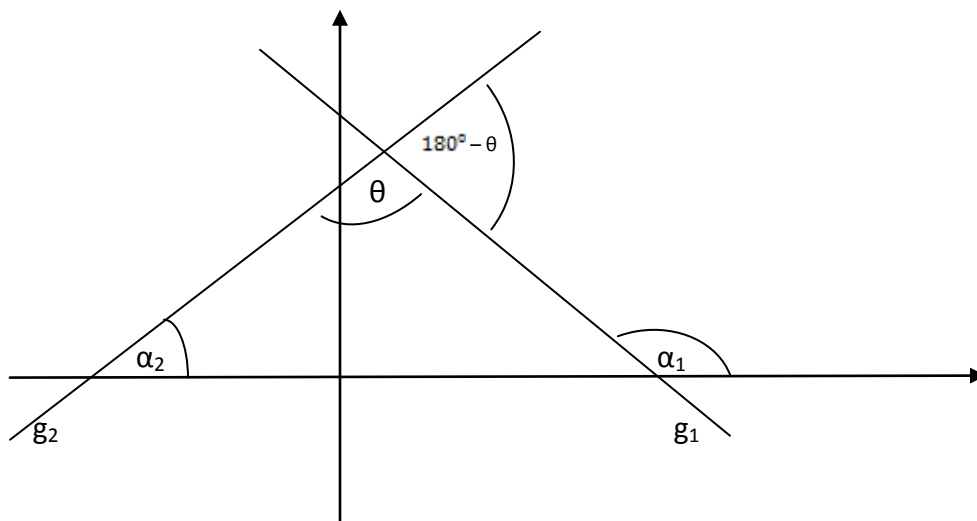
Penyelesaian: $k = \pm \frac{1}{\sqrt{(24)^2 + 7^2}} = \pm \frac{1}{25} .$

Karena $-kC$ positif maka dipilih $k = + \frac{1}{25} .$

Sehingga $-kC = - + \frac{1}{25} (-25) = 1$ yang merupakan jarak titik asal terhadap garis.

E. Sudut Antara Dua Garis

Sudut antara dua garis pada umumnya dimaksudkan lancip (paling besar siku-siku) dan dapat dihitung sebagaimana berikut.



Gambar 3.6. Sudut yang Dibentuk Dua Garis

Misalkan α_1 adalah inklinasi garis g_1 sehingga gradient g_1 adalah $s_1 = \text{tg } \alpha_1$ dan α_2 adalah inklinasi garis g_2 sehingga gradientnya adalah $s_2 = \text{tg } \alpha_2$. Maka θ atau $(180^\circ - \theta)$ adalah sudut yang dibentuk oleh g_1 dan g_2 .

Dari gambar dapat dilihat hubungan $\alpha_2 + \theta = \alpha_1$ (jumlah sudut dalam segitiga), sehingga

$$\alpha_2 + \theta = \alpha_1.$$

Atau

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\text{tg } \theta = \text{tg } (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$= \frac{\text{tg } \alpha_1 - \text{tg } \alpha_2}{1 + \text{tg } \alpha_1 \cdot \text{tg } \alpha_2}$$

$$= \frac{s_1 - s_2}{1 + s_1 \cdot s_2}$$

Karena sudut antara dua garis lancip maka tangen dari sudut antara dua garis harus positif, sehingga rumus diatas dapat kita tulis :

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{s_1 - s_2}{1 + s_1 s_2} \right|$$

Dalam hal $g_1 \parallel g_2$ tentu $s_1 = s_2$ dan $\theta = 0^\circ$.

Kalau kedua garis itu berpotongan tegaklurus maka $\theta = 90^\circ$.

$\text{tg } \theta = \infty$. Jadi $\frac{s_1 - s_2}{1 + s_1 \cdot s_2} = \infty$. Atau $1 + s_1 s_2 = 0$ Atau $s_1 s_2 = -1$.

Dalil:

Jika hasil kali dua koefisien arah dua garis sama dengan -1 maka kedua garis itu saling tegaklurus.

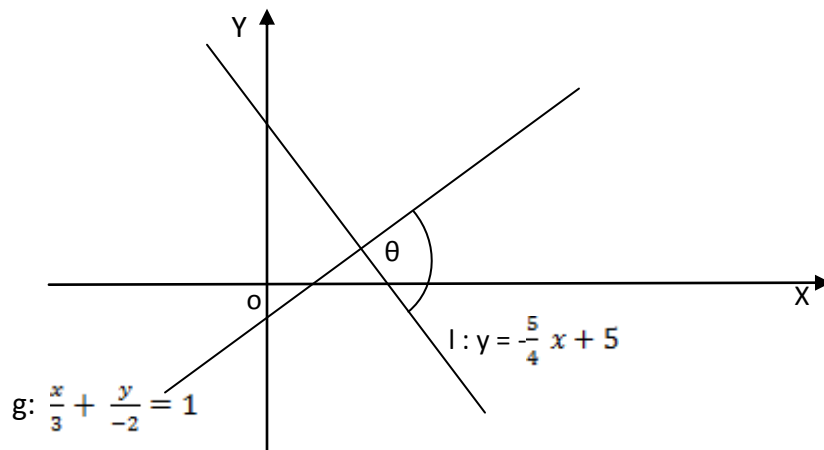
☞ **Contoh :**

Ditentukan dua garis g dan l dengan persamaan $g: \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ dan $l: y = -\frac{5}{4}x + 5$

- Gambarlah garis g dan l dalam bidang koordinat.
- Jika θ adalah sudut yang dibentuk oleh kedua garis, carilah $\text{tg } \theta$.

Penyelesaian :

- Dengan menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu kedua garis dapat digambarkan pada bidang koordinat sebagai berikut.



Gambar 3.7. θ Sudut Antara garis g dan l

b. Karena $\frac{2}{3}$ adalah gradient garis g, dan $-\frac{5}{4}$ adalah gradient garis l

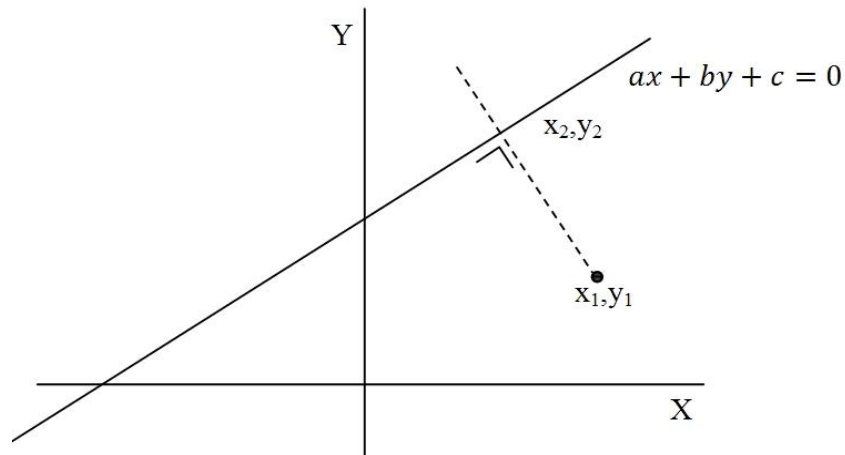
Maka tangens sudut yang dibentuk oleh garis g dan l adalah

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \left| \frac{s_1 + s_2}{1 + s_1 \cdot s_2} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}}{1 + \frac{2}{3} \left(-\frac{5}{4} \right)} \right| \\ &= \frac{23}{2} \\ &= 11,5 \end{aligned}$$

sehingga $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 11,5$ atau $\theta = 85,03$.

E. Jarak Titik Terhadap Garis

Jarak suatu titik terhadap suatu garis merupakan jarak dari titik tersebut terhadap titik yang merupakan perpotongan garis dengan suatu garis yang tegak lurus dengan garis tersebut yang melalui titik tersebut. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar di bawah ini:



Gambar 3.8. Jarak Titik Terhadap Garis

Persamaan Garis yang tegak lurus dengan persamaan garis $ax + by + c = 0$ di atas dan memotong titik (x_1, y_1) adalah

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$$

Kedua garis tersebut berpotongan di titik (x_2, y_2) dan dengan memasukkannya ke dalam kedua persamaan garis di atas, didapatkan (x_2, y_2) sebagai fungsi dari (x_1, y_1)

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{b}{a}(x_2 - x_1) \\ y_2 &= -\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b} \\ \hline -y_1 &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)x_2 - \frac{c}{b} - \frac{b}{a}x_1 \end{aligned}$$

Didapat:

$$x_2 = \frac{ab\left(\frac{b}{a}x_1 - y_1 - \frac{c}{b}\right)}{a^2 + b^2}$$

Substitusi ke persamaan garis I:

$$y_2 = -\frac{a}{b}\left(\frac{ab\left(\frac{b}{a}x_1 - y_1 - \frac{c}{b}\right)}{a^2 + b^2}\right) - \frac{c}{b}$$

Dari sini, telah diperoleh persamaan untuk titik (x_2, y_2) . Jarak antara titik (x_1, y_1) ke garis $ax + by + c = 0$ merupakan jarak antara (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Berdasarkan rumus jarak antara dua titik (menggunakan rumus Pythagoras):

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dengan memasukkan semua peubah, maka akan didapat rumus untuk menentukan jarak (D). Namun, untuk mempermudah penurunannya, rumus di atas perlu dikerjakan suku per suku. Suku $(x_2 - x_1)$

$$x_2 - x_1 = \frac{ab\left(\frac{b}{a}x_1 - y_1 - \frac{c}{b}\right)}{a^2 + b^2} - x_1$$

$$x_2 - x_1 = \frac{b^2x_1 - aby_1 - ac - x_1(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{-a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

Suku $(y_2 - y_1)$

$$y_2 - y_1 = -\frac{a}{b}\left(\frac{ab\left(\frac{b}{a}x_1 - y_1 - \frac{c}{b}\right)}{a^2 + b^2}\right) - \frac{c}{b} - y_1$$

$$y_2 - y_1 = \frac{-abx_1 + a^2y_1 + \frac{a^2c}{b} - \frac{c}{b}(a^2 + b^2) - y_1(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{-abx_1 + a^2y_1 + \frac{a^2c}{b} - \frac{c}{b}(a^2 + b^2) - y_1(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{-b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

Rumus jarak:

$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$D^2 = \left(\frac{-a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{-b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right)^2$$

$$D^2 = \frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} (a^2 + b^2)$$

$$D = \sqrt{\frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)}}$$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Jarak titik terhadap garis dapat juga ditentukan dengan cara sebagai berikut.

Sebagaimana diketahui persamaan normal Hesse adalah $x \cos \delta + y \sin \delta = n$ dengan n = jarak dari titik pangkal ke garis dan δ = sudut antara jarak itu dengan sumbu x positif. Misalkan garis itu g . Misalkan $P(x_1, y_1)$ adalah titik di luar g . Akan ditentukan jarak P terhadap g .

Perhatikan gambar 3.9 berikut.

Misalkan jarak yang diminta adalah d .

Maka $d = |n' - n|$. Tarik garis h melalui

P yang sejajar dengan g . Diperoleh

$$h \equiv x \cos \delta + y \sin \delta = n'.$$

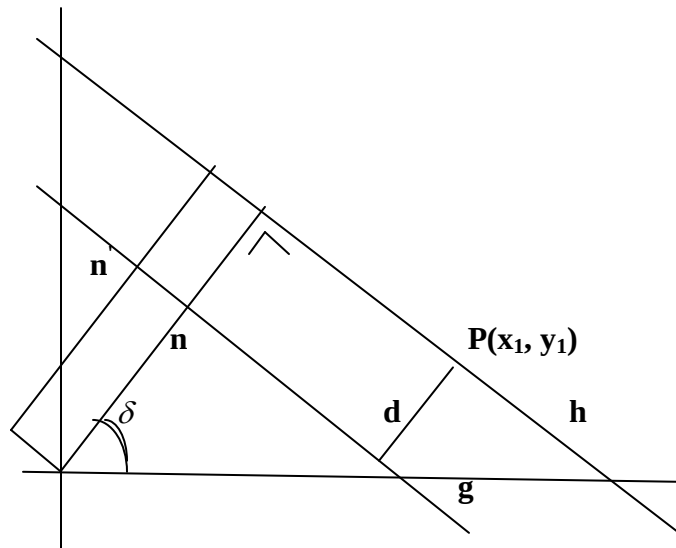
Karena P pada h maka berlaku

$$x_1 \cos \delta + y_1 \sin \delta = n'.$$

Sehingga

$$d = |n' - n| = |x_1 \cos \delta + y_1 \sin \delta - n|$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$



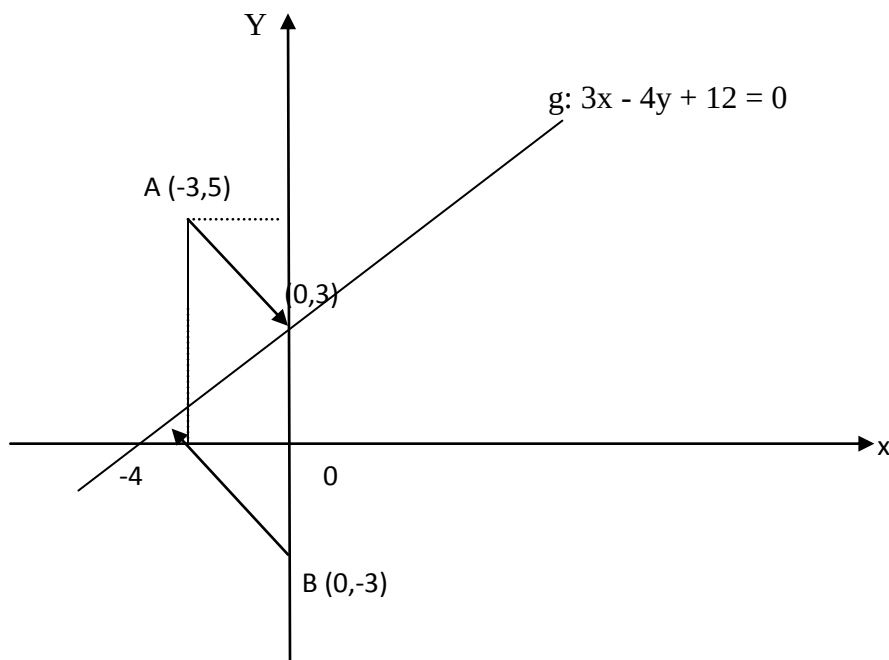
Gambar 3.9. Jarak titik Terhadap Garis

☛ **Contoh :**

Carilah jarak dari titik A(-3,5) dan dari titik B (0,-3) terhadap garis g dengan persamaan g: $3x - 4y + 12 = 0$.

Penyelesaian:

Jarak dari titik A(-3,5) dan dari titik B (0,-3) terhadap garis g: $3x - 4y + 12 = 0$ dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 3.10. Jarak Titik (-3, 5) dan (0,-3) Terhadap Garis g

Misalkan d_1 = jarak dari titik A ke garis g, dan d_2 = jarak dari titik B ke garis g, maka :

$$\begin{aligned}d_1 &= \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \\&= \left| \frac{3(-3) + (-4)5 + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| \\&= \left| \frac{-17}{5} \right| \\&= 3 \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_2 &= \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \\&= \left| \frac{3(0) + (-4)(-3) + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| \\&= \left| \frac{24}{5} \right| \\&= 4 \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Jadi, jarak terhadap garis $g: 3x - 4y + 12 = 0$. Dari titik A (-3,5) adalah $3\frac{2}{5}$ satuan panjang, dan dari titik B (0,-3) adalah $4\frac{4}{5}$ satuan panjang.

Rangkuman

1. Persamaan garis jika diketahui sebuah titik (x_1, y_1) dan kemiringan garis tersebut adalah

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

2. Persamaan garis melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$.

3. Persamaan garis melalui titik-titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y adalah

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4. Jika persamaan kedua garis lurus dinyatakan dengan

$$\left. \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ dengan } A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 \text{ dan } C_2 \text{ sebagai bilangan-bilangan tetap.}$$

Jika

$$\text{a. } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \text{ maka kedua garis } \textbf{berpotongan}.$$

$$\text{b. } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ maka kedua garis } \textbf{sejajar}.$$

$$\text{c. } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ maka kedua garis } \textbf{berimpit}.$$

5. Persamaan berkas garis yang melalui g_1 dan g_2 adalah $g_1 + \lambda g_2 = 0$.

6. Jika θ menyatakan sudut yang dibentuk oleh dua garis maka tangen dari sudut antara dua garis

$$\text{adalah } \textbf{tg } \theta = \left| \frac{s_1 - s_2}{1 + s_1 s_2} \right|.$$

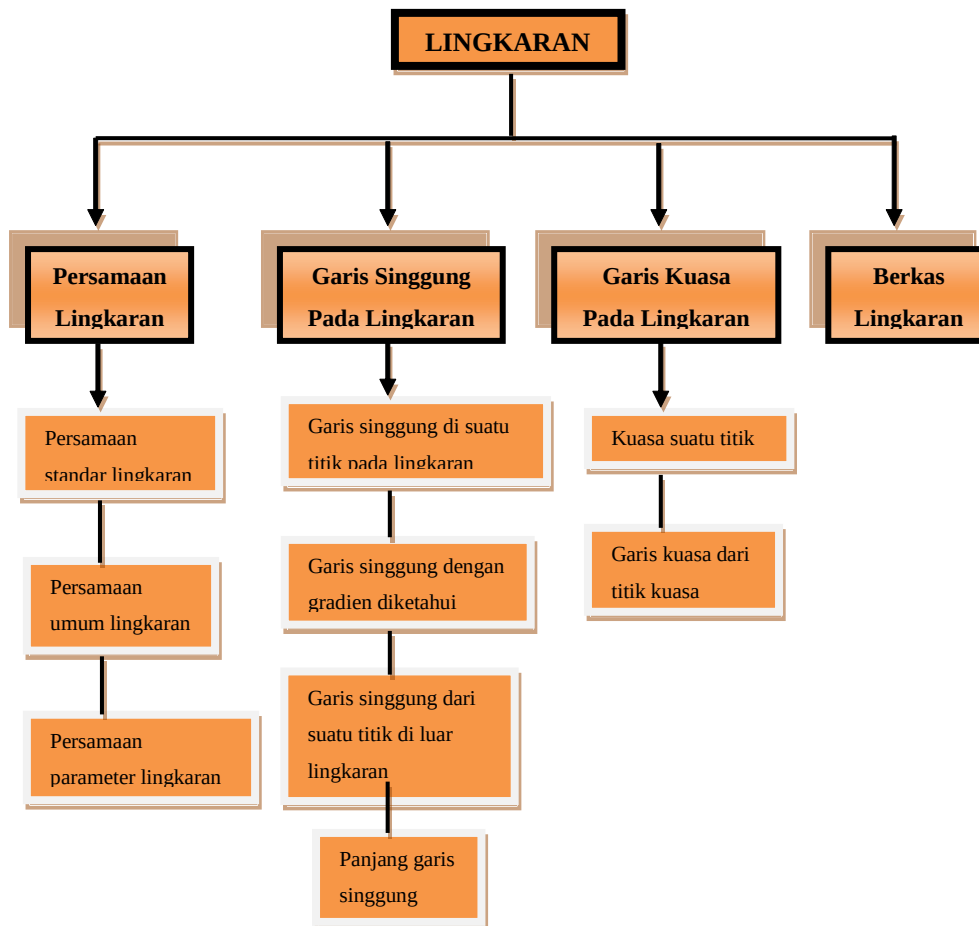
7. Jarak dari titik (x_1, y_1) ke garis $g \equiv ax + by + c = 0$ adalah $D = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$.

 **Latihan:**

1. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui
 - a. $(-3,0)$ dan $(1, 4)$
 - b. $(1, 3)$ dan $(2, 5)$
 - c. $(0, 3)$ dan $(6, 0)$
 - d. $(3, -3)$ dan $(3, 5)$
2. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui $(0, 0)$ dan yang bersudut 60° dengan sumbu-x.
3. Tentukan persamaan garis lurus yang mempunyai sudut inklinasi $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ dan melalui titik $(1, 2)$.
4. Pada soal-soal berikut ini, klasifikasikan garis-garis yang saling sejajar, tegak lurus atau berimpit.
 - a. $y = 4x - 7$ dan $y = 4x + 9$
 - b. $y = 2x - 3$ dan $y = 7 - \frac{1}{2}x$
 - c. $5x - 3y + 6 = 0$ dan $10x - 6y + 7 = 0$
 - d. $y - 2 = 4(x - 3)$ dan $y - 7 = \frac{1}{4}(x - 3)$
 - e. $y = \frac{1}{2}x$ dan $x = \frac{1}{2}y$
5. Tentukan titik potong dari kedua garis yang diberikan berikut ini.
 - a. $6x - 9y = 7$ dan $x = -\frac{2}{3}$
 - b. $4x + 3y = -2$ dan $5x - 2y = 9$.
6. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui $(1, 0)$ dan yang sejajar garis $2x + y - 6 = 0$.
7. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui $(1, 2)$ dan yang tegak lurus terhadap garis $2x - y - 1 = 0$.
8. Apakah ketiga titik $(2, -2)$, $(1, 2)$ dan $(3, -4)$ terletak pada satu garis?
9. Tentukan titik-titik potong garis $x - 2y + 1 = 0$ terhadap sumbu x dan sumbu y.
10. Gambarkan grafik dari persamaan-persamaan
 - a. $y = 2 - 3x$
 - b. $y = \frac{1}{4}x$
 - c. $y = -\sqrt{3}$
 - d. $x = 3$
11. Selidiki, apakah garis-garis $x + 2y - 5 = 0$, $2x - y = 0$ dan $2x + 3y - 8 = 0$ melalui sebuah titik? Titik manakah itu?

12. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik pangkal dan titik potong garis $x - y + 1 = 0$ dan $x + 2y - 4 = 0$. Gambarkan kedua garis tersebut pada bidang koordinat Cartesius.
13. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong kedua garis $y = x + 1 = 0$ dan $y = -\frac{1}{2}x + 2$ dan yang bersudut 60° dengan sumbu x positif. Gambarkan kedua garis tersebut pada bidang koordinat Cartesius.
14. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis $4x + 10y - 5 = 0$ dan $3x - 4y + 2 = 0$ dan yang tegak lurus salah satu dari kedua garis itu.
15. Tentukan jarak antara titik dan garis yang diberikan berikut ini.
- a. Titik $(-3, 2)$ dan garis $5x + 12y + 30 = 0$.
 - b. Titik $(2, 1)$ dan garis $4x - 3y + 10 = 0$.
 - c. Titik $(8, 4)$ dan garis $5x + 12y - 36 = 0$.
16. Apakah grafik $\frac{y}{x} = 1$ merupakan sebuah garis? Jelaskan.
17. Tentukan, persamaan kedua garis lurus yang melalui $P(-2, 5)$ sedemikian sehingga titik-titik $A(3, -7)$ dan $B(-4, 1)$ berjarak sama terhadap garis itu.

BAB IV LINGKARAN



Gambar 4.1. Peta Konsep Lingkaran

Sejarawan Matematika

Thales (624-550 SM)

Thales dapat disebut matematikawan pertama yang merumuskan teorema atau proposisi, dimana tradisi ini menjadi lebih jelas setelah dijabarkan oleh Euclid. Landasan matematika sebagai ilmu terapan rupanya sudah diletakkan oleh Thales sebelum muncul Pythagoras yang membuat bilangan.

Pythagoras (582-496 SM)

Pythagoras adalah orang yang pertama kali mencetuskan aksioma-aksioma, postulat-postulat yang perlu dijabarkan terlebih dahulu dalam mengembangkan geometri. Pythagoras bukan orang yang menemukan suatu teorema Pythagoras namun berhasil membuat pembuktian matematis. 2 sebagai bilangan irrasional.

Socrates (427-347 SM)

Socrates merupakan seorang filosofi besar dari Yunani. Dia juga menjadi pencipta ajaran serba cita, karena itu filosofinya dinamakan idealisme. Ajarannya lahir karena pergaulannya dengan kaum filosofis. Plato merupakan ahli pikir pertama yang menerima paham adanya alam bukan benda.

Euclides (325-265 SM)

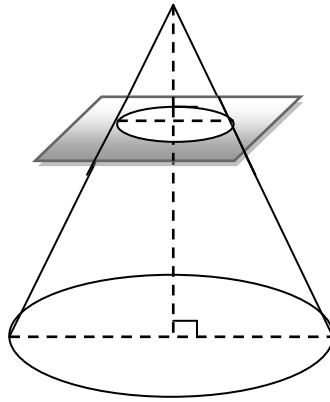
Euclides disebut sebagai “Bapak Geometri” karena menemukan teori bilangan dan geometri. Subyek-subyek yang dibahas adalah bentuk-bentuk, teorema Pythagoras, persamaan dalam aljabar, lingkaran, tangen, geometri ruang, teori proporsi dan lain-lain. Alat-alat temuan Euclides antara lain mistar dan jangka.

Archimedes (287-212 SM)

Archimedes mengaplikasikan prinsip fisika dan matematika. Dan juga menemukan perhitungan π (pi) dalam menghitung luas lingkaran. Ia adalah ahli matematika terbesar sepanjang zaman dan di zaman kuno. Tiga karya Archimedes membahas geometri bidang datar, yaitu pengukuran lingkaran, kuadratur dari parabola dan spiral.

A. Persamaan Lingkaran

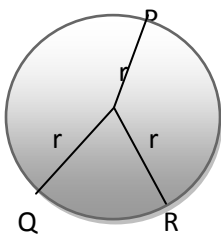
Jika sebuah kerucut dipotong dengan sebuah bidang irisan yang tegak lurus terhadap sumbu kerucut, akan diperoleh irisan berbentuk lingkaran



Gambar 4.2. Irisan Kerucut

Dalam suatu bidang, lingkaran didefinisikan sebagai berikut.

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu.

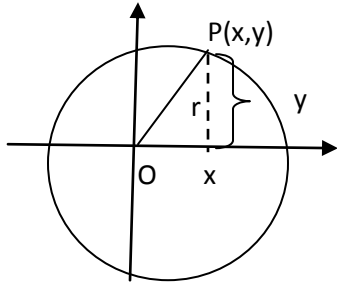


Titik tertentu ini disebut *pusat lingkaran*, dan jarak yang sama disebut *jari-jari lingkaran*. Pada gambar 4.3 dilukiskan sebuah lingkaran yang merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik pusat M dan memiliki jarak yang sama terhadap titik M, yaitu jari-jari r .

Gbr 4.3. Lingkaran

1. Lingkaran Berpusat di O(0,0)

a. Persamaan Lingkaran Berpusat di O(0,0) dengan Jari-Jari r



Gambar 4.4. Lingkaran Berpusat di O

Gambar di atas menunjukkan sebuah lingkaran berpusat di O(0,0). Misalnya, diambil sebuah titik sebarang P(x,y) yang terletak pada lingkaran. Jika titik P diproyeksikan pada sumbu-x, diperoleh titik Q sehingga OPQ adalah segitiga siku-siku di Q. Oleh karena $\triangle OQP$ siku-siku di Q, menurut Dalil Pythagoras berlaku

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Titik P(x,y) yang diambil adalah sebarang sehingga persamaan tersebut juga berlaku umum untuk persamaan lingkaran berpusat di O(0,0) dan memiliki jari-jari r.

☞ Contoh

Tentukan persamaan lingkaran berpusat di O(0,0) dan jari-jari $5\sqrt{2}$

Penyelesaian :

$$\text{Jari-jari } r = 5\sqrt{2} \iff r^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di O(0,0) dengan $r = 5\sqrt{2}$ adalah $x^2 + y^2 = 50$

Posisi Titik (x_1, y_1) terhadap Lingkaran

$$L : x^2 + y^2 = r^2$$

- P(x_1, y_1) pada lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 = r^2$
- P(x_1, y_1) di luar lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 > r^2$
- P(x_1, y_1) di dalam lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 < r^2$

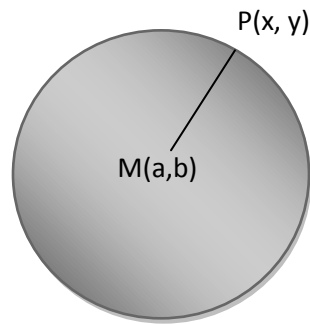
2. Lingkaran Berpusat di $M(a, b)$

a. Persamaan Lingkaran Berpusat di $M(a, b)$ dan Jari-jari r

Misalnya, diketahui dua titik sebarang $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka berlaku hubungan berikut.

Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dirumuskan oleh

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Gambar 4.5. Lingkaran yang Berpusat di $M(a, b)$

Perhatikan dengan seksama Gambar 4.5. Gambar tersebut menunjukkan sebuah lingkaran berpusat di $M(a, b)$ dengan jari-jari r . Misalnya, diambil sebuah titik sebarang $P(x, y)$ yang terletak pada lingkaran. Jika Anda amati, tampak jarak antara titik pusat $M(a, b)$ dan titik $P(x, y)$ sama dengan jari-jari r . Dengan demikian, $PM = r$.

$$\text{Atau } r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (\text{persamaan dikuadratkan})$$

Oleh karena titik $P(x, y)$ diambil sebarang, persamaan tersebut berlaku umum untuk lingkaran berpusat di $M(a, b)$ dan jari-jari r . Bentuk persamaan ini disebut *bentuk baku persamaan lingkaran*.

Contoh:

Tuliskan persamaan lingkaran yang berpusat di $(5, -3)$ dan memiliki jari-jari $3\sqrt{2}$.

Penyelesaian :

Persamaan lingkaran dengan pusat $(5, -3)$ dan jari-jari $3\sqrt{2}$ adalah $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 18$.

b. Posisi Titik terhadap Lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Posisi titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$P(x_1, y_1)$ pada lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

$P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$

$P(x_1, y_1)$ di dalam lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$

c. Menentukan Pusat dan Jari-jari Lingkaran yang Persamaannya Bukan Bentuk Baku

Contoh soal

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0$$

Penyelesaian:

$$\left[x^2 - 8x + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 \right] + \left[y^2 + 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \right] = -25 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = -25 + 16 + 25$$

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

Jadi, diperoleh pusat lingkaran $M(4, -5)$ dan jari-jari $r = \sqrt{16} = 4$

3. Persamaan Umum Lingkaran

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Persamaan umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Beberapa kemungkinan untuk jari-jari r :

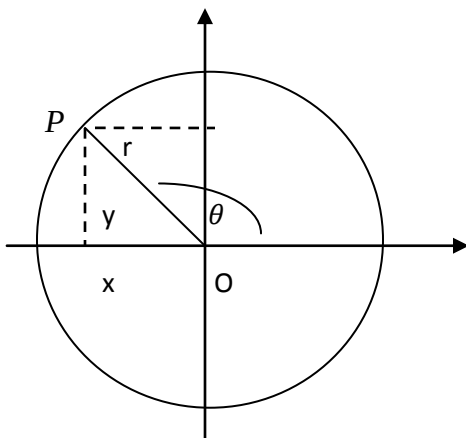
1. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C > 0$, maka lingkaran itu real.
2. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C = 0$, maka lingkaran itu berupa titik
3. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C < 0$, maka lingkaran itu imajiner. artinya pusatnya ada dan nyata, tetapi lingkaran itu hayal karena r^2 negatif sehingga tidak ada titik real

Peninjauan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

1. Jika $A = 0$ maka persamaan lingkaran menjadi $x^2 + y^2 + By + C = 0$, sehingga pusat lingkaran terletak pada sumbu Y atau $P(0, -\frac{1}{2}B)$
2. Jika $B = 0$ maka persamaan lingkaran menjadi $x^2 + y^2 + Ax + C = 0$, sehingga pusat lingkaran terletak pada sumbu X atau $P(-\frac{1}{2}A, 0)$
3. Jika $C = 0$ maka persamaan lingkaran menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$, sehingga lingkaran melalui $(0, 0)$

4. Persamaan Parameter Lingkaran

Misalkan θ = sudut yang dibentuk OP terhadap sumbu x dan $OP = r$ = jari-jari lingkaran
 $x^2 + y^2 = r^2$



$$\frac{x}{r} = \cos \theta \Rightarrow x = r \cos \theta$$

$$\frac{y}{r} = \sin \theta \Rightarrow y = r \sin \theta$$

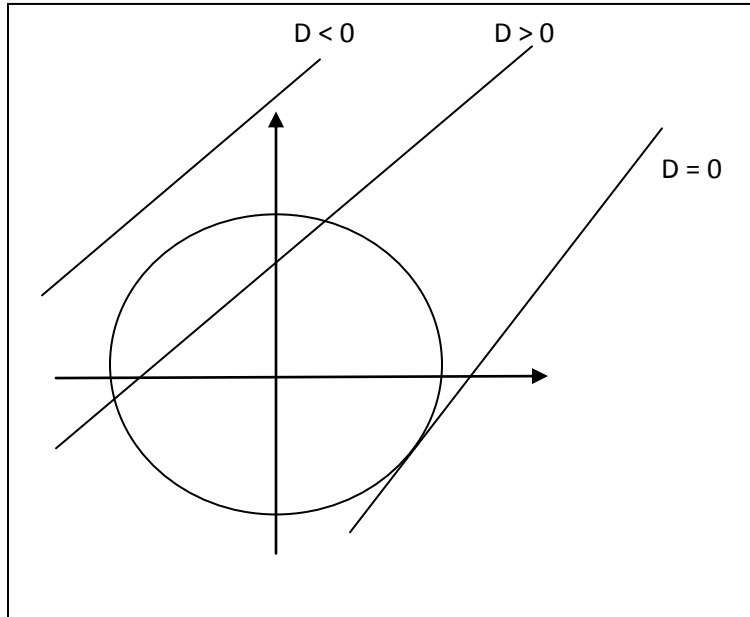
$$\therefore x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

**Persamaan Parameter
lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$**

Gambar 4.6. Lingkaran Berpusat di (0,0)

5. HUBUNGAN GARIS DAN LINGKARAN



Gambar 4.7. Kedudukan Garis dan Lingkaran

Kemungkinan kedudukan garis dan lingkaran ada 3 sebagaimana berikut ini.

1. Garis memotong lingkaran, jika $D > 0$
2. Garis menyinggung lingkaran jika $D = 0$
3. Garis tidak memotong lingkaran jika, $D < 0$

Misalkan persamaan garis lurus : $y = mx + n$ (i)

dan persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 = r^2$ (ii)

Substitusi (ii) ke (i), diperoleh

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$$

$$\text{Sehingga : } D = (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2)$$

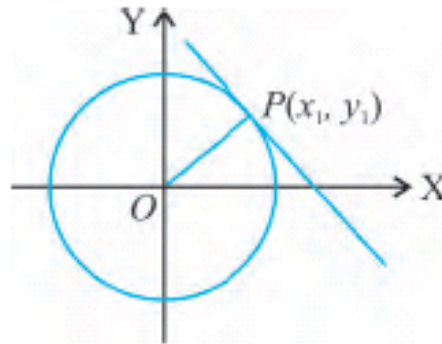
B. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1. Pengertian Garis Singgung yang Melalui Suatu Titik pada Lingkaran

Posisi garis terhadap lingkaran sebagaimana yang telah dibahas, yaitu garis yang memotong lingkaran di dua titik yang berbeda, garis yang tidak memotong lingkaran, dan garis yang memotong lingkaran di satu titik atau yang sering disebut garis singgung pada lingkaran.

a. Persamaan Garis Singgung di Titik $P(x_1, y_1)$ pada Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

Garis singgung l menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ karena $OP \perp$ garis l .



Gambar 4.8. Garis Singgung pada Lingkaran

Karena OP tegaklurus garis l maka

$$m_{op} \cdot m_l = -1$$

$$\frac{y_1}{x_1} \cdot m_l = -1$$

$$m_l = \frac{-1}{\frac{y_1}{x_1}}$$

$$m_l = -\frac{x_1}{y_1}$$

Sehingga persamaan garis singgungnya sebagai berikut.

$$y - y_1 = m_l (x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$$

$$y_1 (y - y_1) = -x_1 (x - x_1)$$

$$y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$$

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$$

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di (x_1, y_1) adalah:

$$x_1x + y_1y = r^2$$

Agar lebih dapat memahami materi ini, pelajailah contoh soal berikut ini.

Contoh soal

Tunjukkan bahwa titik $(6, -8)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$, kemudian tentukan pula garis singgungnya!

Penyelesaian

Ditunjukkan bahwa titik $(6, -8)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$, yaitu dengan mensubstitusikan $(6, -8)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$

$$\begin{aligned} 6^2 + (-8)^2 &= 100 \\ 36 + 64 &= 100 \end{aligned}$$

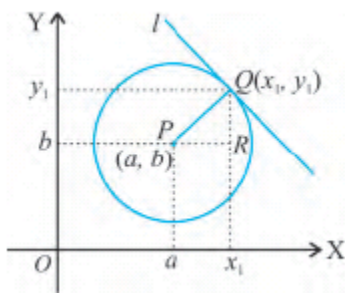
Terbukti bahwa titik $(6, -8)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$

Persamaan garis singgung di titik $(6, -8)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$, adalah:

$$\begin{aligned} x_1x + y_1y &= r^2 \\ 6x - 8y &= 100 \\ 3x - 4y &= 50 \end{aligned}$$

b. Persamaan Garis Singgung Melalui Titik (x_1, y_1) pada Lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.9. Garis Singgung pada Lingkaran

Gradien garis PQ adalah:

$$m_{PQ} = \frac{QR}{PR} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

Gradien garis singgung l yang tegak lurus PQ adalah:

$$m_l m_{PQ} = -1$$

$$m_l \cdot \frac{y_1 - b}{x_1 - a} = -1$$

$$m_l = -\frac{1}{\frac{y_1 - b}{x_1 - a}} = -\frac{(x_1 - a)}{(y_1 - b)}$$

Jadi persamaan garis l dengan gradien $m_l = -\frac{(x_1 - a)}{(y_1 - b)}$ dan melalui titik $Q(x_1, y_1)$ adalah:

$$y - y_1 = m_l(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{(x_1 - a)}{(y_1 - b)}(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$yy_1 - by - y_1^2 + by_1 = -(x_1x - x_1^2 - ax + ax_1)$$

$$yy_1 - by - y_1^2 + by_1 = -x_1x + x_1^2 + ax - ax_1$$

$$yy_1 - by + by_1 + x_1x - ax + ax_1 = x_1^2 + y_1^2 \dots\dots\dots (1)$$

Untuk $Q(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

$$x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 = r^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 + 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned}
& yy_1 - by + by_1 + x_1x - ax + ax_1 = x_1^2 + y_1^2 \\
& yy_1 - by + by_1 + x_1x - ax + ax_1 = r^2 + 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 \\
& yy_1 - by + by_1 + x_1x - ax + ax_1 - 2ax_1 - 2by_1 + a^2 + b^2 = r^2 \\
& yy_1 - by - by_1 + x_1x - ax - ax_1 + a^2 + b^2 = r^2 \\
& yy_1 - by - by_1 + b^2 + xx_1 - ax - ax_1 + a^2 = r^2 \\
& (y - b)(y_1 - b) + (x - a)(x_1 - a) = r^2 \\
& (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2 \\
& (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan garis singgung lingkarannya adalah:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Untuk lebih memahami materi ini, perhatikanlah contoh soal berikut ini.

Contoh soal

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 36 \text{ pada titik } A(2, 3)!$$

Penyelesaian

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

$$(x_1 + 3)(x + 3) + (y_1 - 5)(y - 5) = 36$$

Pada titik $A(2, 3)$:

$$(2 + 3)(x + 3) + (3 - 5)(y - 5) = 36$$

$$5(x + 3) + (-2)(y - 5) = 36$$

$$5x + 15 - 2y + 10 = 36$$

$$5x - 2y + 25 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung: $5x - 2y + 25 = 0$.

Maka persamaan garis singgung melalui $Q(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ adalah

$$x_1x + y_1y + A(x_1 + x) + B(y_1 + y) + C = 0$$

2. Persamaan Garis Singgung yang Gradiennya Diketahui

a. Persamaan Garis Singgung dengan Gradien m terhadap Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

Untuk persamaan garis singgung $y =$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y &= mx + n \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x^2 + (mx + n)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + m^2 x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0 \end{aligned}$$

Syarat menyinggung adalah $D =$

$$\begin{aligned} (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2) &= 0 \\ \frac{4m^2 n^2 - 4(n^2 + m^2 n^2 - r^2 - m^2 r^2)}{m^2 n^2 - n^2 - m^2 n^2 + r^2 + m^2 r^2} &= 0 : 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow n^2 &= r^2 + m^2 r^2 \\ \Leftrightarrow n^2 &= r^2(1 + m^2) \\ \Leftrightarrow n &= \pm r\sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah:

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Agar lebih memahami tentang materi ini, pelajailah contoh soal berikut ini dengan baik.

Contoh soal

Tentukan persamaan garis singgung dengan gradien $2\sqrt{2}$ pada lingkaran di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 16$!

Penyelesaian

Persamaan garis singgung dengan gradien $2\sqrt{2}$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ adalah:

$$m = 2\sqrt{2}$$

$$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

$$\begin{aligned}y &= mx \pm r\sqrt{1+m^2} \\&= 2\sqrt{2}x \pm 4\sqrt{1+4^2} \\&= 2\sqrt{2}x \pm 4\sqrt{1+16} \\&= 2\sqrt{2}x \pm 4\sqrt{17}\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgungnya: $y = 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{17}$
 $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{17}$

b. Persamaan Garis Singgung dengan Gradien m terhadap Lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Dengan cara seperti mencari persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah:

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Maka, persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

c. Persamaan Garis Singgung dengan Gradien m terhadap Lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

adalah $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$

Untuk lebih memahami, pelajailah contoh soal berikut.

Contoh soal

Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus garis $g: -3x + 4y - 1 = 0$, terhadap lingkaran!

Penyelesaian

$$g: -3x + 4y - 1 = 0$$

$$4y = 3x + 1$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow m_g = \frac{3}{4}$$

$$\text{Syarat tegak lurus: } m_l m_g = -1$$

$$m_l \cdot \frac{3}{4} = -1$$

$$m_l = -\frac{4}{3}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\text{Pusat } (-2, 1)$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Persamaan lingkaran: } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$\text{Persamaan garis singgung:}$$

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \pm 2\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \pm 2\sqrt{1 + \frac{16}{9}}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \pm 2\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \pm 2 \cdot \frac{5}{3}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \pm \frac{10}{3}$$

$$3(y - 1) = -4x - 8 \pm 10$$

$$3y - 3 = -4x - 8 \pm 10$$

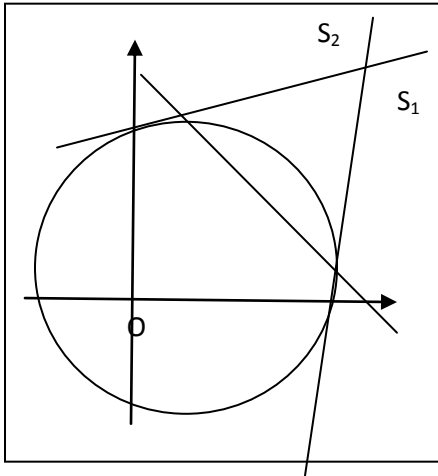
$$3y - 3 = -4x - 8 + 10 \quad \text{atau} \quad 3y - 3 = -4x - 8 - 10$$

$$3y = -4x + 5 \quad \text{atau} \quad 3y = -4x - 15$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{atau} \quad y = -\frac{4}{3}x - 5$$

C. PERSAMAAN GARIS KUTUB (GARIS POLAR)

Jika titik $P(x_0, y_0)$ di luar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka dapat ditarik dua garis singgung melalui titik-titik $S_1(x_1, y_1)$ dan $S_2(x_2, y_2)$



Gambar 4.10. Garis Khutub Lingkaran

Kedua persamaan garis singgung itu adalah

$$S_1 : x_1x + y_1y = r^2$$

$$S_2 : x_2x + y_2y = r^2$$

karena kedua garis singgung tersebut melalui titik $P(x_0, y_0)$ maka berlaku bahwa

$$S_1 : x_1x_0 + y_1y_0 = r^2 \text{ dan}$$

$$S_2 : x_2x_0 + y_2y_0 = r^2$$

Dari dua persamaan diatas, dapat disimpulkan bahwa koordinat-koordinat titik S_1 dan S_2 memenuhi persamaan :

$$x_0x + y_0y = r^2$$

Dan berarti juga bahwa persamaan garis itu melalui titik singgung S_1 dan S_2 , hal itu biasa disebut **tali busur singgung** dari titik P .

Jika diperhatikan persamaan tali busur singgung tersebut bentuknya sama dengan persamaan garis singgung, jika titik P sebagai titik singgungnya. Tanpa memperhatikan letak titik P , di dalam, di luar, atau pada lingkaran, maka persamaan $x_0x + y_0y = r^2$ dinamakan persamaan garis kutub di $P(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

Analog (dengan cara yang mirip / sama), maka kita dapat menentukan persamaan garis kutub (garis polar) titik $P(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yaitu:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

Sedangkan persamaan garis kutub di titik $P(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ yaitu:

$$x_0x + y_0y + \frac{1}{2}A(x - x_0) + \frac{1}{2}B(y - y_0) + C = 0$$

Dari penyelesaian dengan menggunakan rumus-rumus di atas, dapat disimpulkan bahwa :

1. Jika titik P diluar $\odot$, maka garis kutubnya berupa tali busur singgung
2. Jika titik P pada $\odot$, maka garis kutubnya merupakan garis singgung lingkaran
3. Jika titik P dalam $\odot$, maka garis kutubnya tidak memotong

Contoh:

Jika diketahui garis kutubnya terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ adalah $x + 2y + 12 = 0$ maka tentukan titik kutubnya!

Penyelesaian :

Misalkan titik kutubnya (x_1, y_1) , maka persamaan garis kutub terhadap lingkaran tersebut adalah :

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

$$x_1x + y_1y + (-2)(x + x_1) + 3(y + y_1) + 5 = 0$$

$$(x_1 - 2)x + (y_1 + 3)y - 2x_1 + 3y_1 + 5 = 0$$

Garis yang diperoleh ini berhimpit dengan garis $x + 2y + 12 = 0$, sehingga

$$\frac{x_1}{1} = \frac{y_1 + 3}{2} = \frac{-2x_1 + 3y_1 + 5}{12}$$

Atau

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 = y_1 + 3 \\ 12x_1 - 24 = -2x_1 + 3y_1 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x_1 - y_1 = 7 & \times 3 \\ 12x_1 - 3y_1 = 29 & \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6x_1 - 3y_1 = 21 \\ 12x_1 - 3y_1 = 29 \end{array}$$

$$\Rightarrow -8x_1 = 8$$

$$x_1 = 1$$

$$2x_1 - y_1 = 7 \Rightarrow 2(1) - y_1 = 7$$

$$y_1 = -5$$

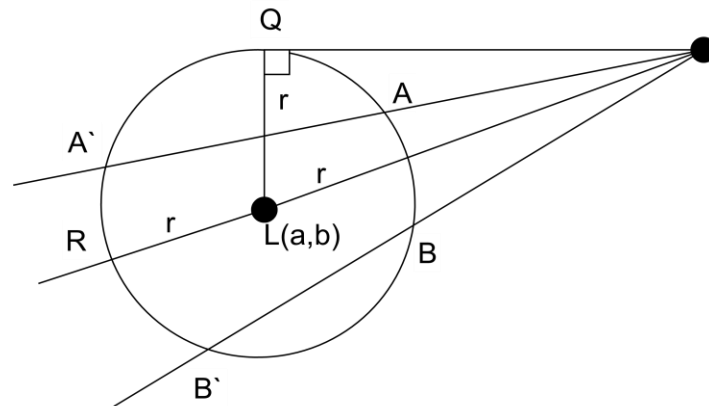
Jadi, titik kutub yang dicari adalah $(1, -5)$.

D. KUASA SUATU TITIK

Dari suatu titik P dapat ditarik banyak sekali garis-garis yang memotong lingkaran menurut titik-titik A dan A', B dan B', dst, dan menyinggung lingkaran di titik-titik Q dan R. Secara planimetris dapat dibuktikan $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PQ^2 = PR^2 = PL^2 - r^2$.

Hasil kali yang tetap ini disebut kuasanya P terhadap lingkaran

Perhatikan Gambar :



Gambar 4.11. Kuasa Suatu Titik terhadap Lingkaran

Misalkan $L(a,b)$ dan $P(x_1, x_2)$, menurut rumus jarak :

$$PL^2 = PQ^2 + QL^2$$

$$PL^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

$$\text{Tetapi } PL^2 - r^2 = PQ^2$$

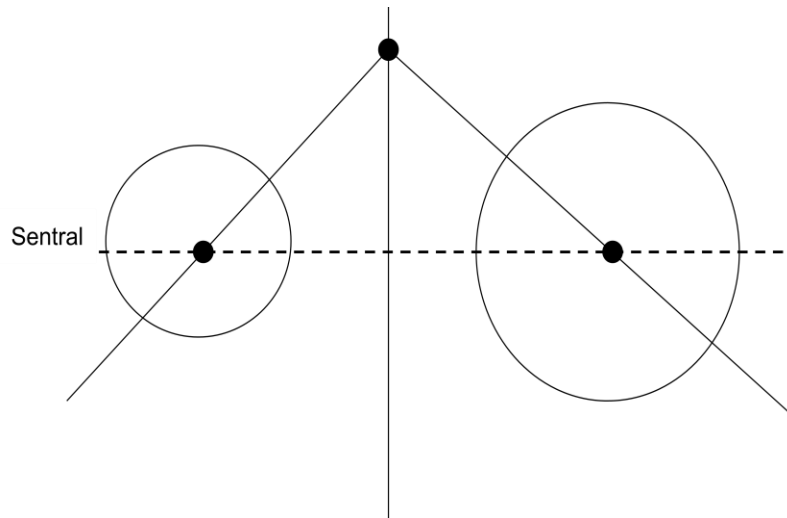
$$\text{Jadi, } (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = PQ^2 = \text{ kuasa P terhadap lingkaran} = PA \cdot PA' = PB \cdot PB'.$$

Dalil :

Kalau P (x_1, y_1) dan $L \equiv (a, b)$ maka kuasanya P terhadap lingkaran adalah

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$$

E. Garis Kuasa



Gambar 4.12. Garis Kuasa Dua Lingkaran

Misalkan $P(x_1, y_1)$ mempunyai kuasa yang sama terhadap L_1 dan L_2 , dengan persamaan :

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2r_1 = 0 \rightarrow \text{pusatnya } (-a, -b)$$

$$L_2 \equiv x^2 + y^2 + 2px + 2qy + 2r_2 = 0 \rightarrow \text{pusatnya } (-p, -q)$$

$$\text{Kuasa P terhadap } L_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + 2r_1$$

$$\text{Kuasa P terhadap } L_2 = x_1^2 + y_1^2 + 2px_1 + 2qy_1 + 2r_2$$

Karena P mempunyai kuasa yang sama terhadap L_1 dan L_2 maka :

$$\text{Kuasa P terhadap } L_1 = \text{Kuasa P terhadap } L_2$$

$$x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + 2r_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2px_1 + 2qy_1 + 2r_2$$

Jika dilanjutkan akan memperoleh :

$$(a - p)x + (b - q)y + (r_1 - r_2) = 0$$

Karena bentuk tersebut linier, tentu grafiknya merupakan garis lurus yang disebut **garis kuasa** dua lingkaran, dengan simbol :

$$L_1 - L_2 = 0$$

Sifat : **Garis kuasa tegak lurus sentral**

$$\text{Gradien garis kuasa} = \frac{p-a}{b-a}$$

$$\text{Gradien garis sentral} = \frac{q-b}{p-a}$$

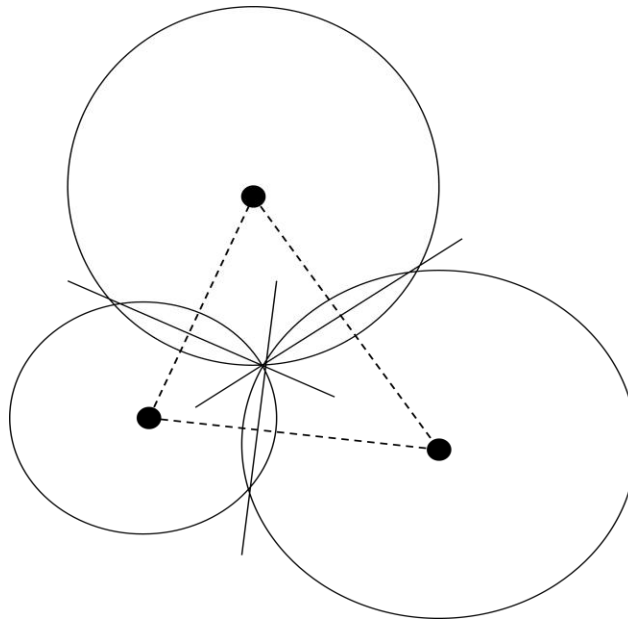
Hasil kali kedua gradien itu sama dengan -1. Oleh karena itu kedua garis itu tegak lurus sesamanya.

Kesimpulan :

Tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap dua buah lingkaran merupakan sebuah garis kuasa yang tegak lurus sentral.

F. Titik Kuasa

Perhatikan gambar :



Gambar 4.13. Titik Kuasa dari Tiga Lingkaran

Misalkan : $g_1 \equiv L_1 - L_2 = 0$

$$g_2 \equiv L_2 - L_3 = 0$$

$$g_3 \equiv L_1 - L_3 = 0$$

Berkas garis $g_1 + \lambda g_2 = 0$

atau $(L_1 - L_2) + \lambda(L_2 - L_3) = 0 \dots\dots\dots 1)$

Untuk tiap-tiap harga λ garis yang didapat dari berkas itu senantiasa melalui titik potong S kedua garis g_1 dan g_2 , Ambillah $\lambda = 1$, maka persamaan 1) menjadi :

$$L_1 - L_3 = 0$$

Bentuk terakhir ini tepat sama dengan persamaan garis g_3 , jadi g_3 juga melalui titik potong S, atau ketiga garis kuasa melalui satu titik S.

Kesimpulan :

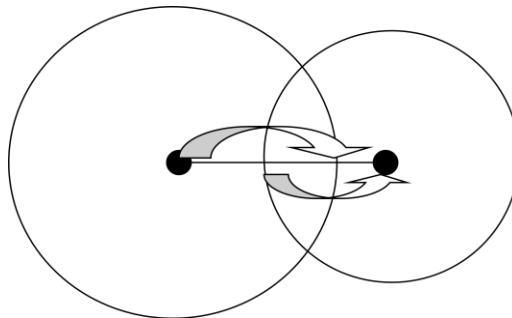
Tiga buah lingkaran hanya mempunyai sebuah titik kuasa, yakni titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap tiga lingkaran.

G. Berkas Lingkaran

Posisi sebuah lingkaran terhadap lingkaran lainnya ada 4, yaitu :

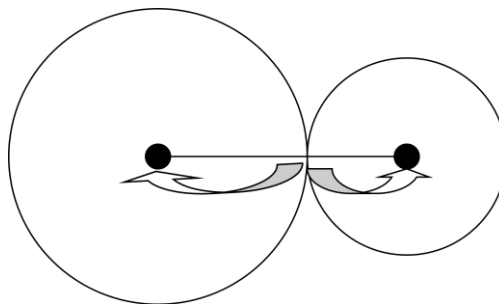
1. Kedua lingkaran berpotongan pada dua titik.
2. Kedua lingkaran bersinggungan luar.
3. Kedua lingkaran tidak bersinggungan dalam.
4. Kedua lingkaran tidak berpotongan luar.
5. Kedua lingkaran tidak berpotongan dalam.

a. Kedua Lingkaran Berpotongan pada Dua Titik



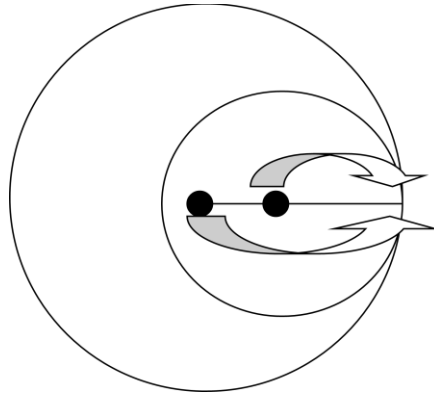
Gambar 4.14. Jarak dari M_1 ke M_2 , $M_1M_2 < r_1 + r_2$

b. Kedua Lingkaran Bersinggungan Luar



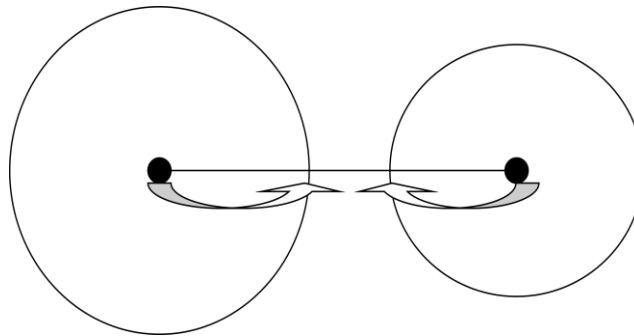
Gambar 4.15. Jarak dari M_1 ke M_2 , $M_1M_2 = r_1 + r_2$

c. Kedua Lingkaran Bersinggungan Dalam



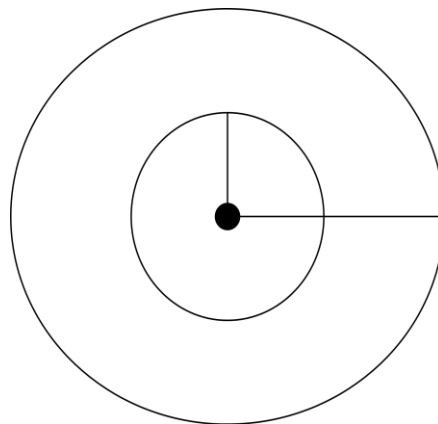
Gambar 4.16. Jarak dari M_1 ke M_2 , $M_1M_2 = |r_1 - r_2|$

d. Kedua Lingkaran Tidak Berpotongan Luar



Gambar 4.17. Jarak dari M_1 ke M_2 , $M_1M_2 > r_1 + r_2$

e. Kedua Lingkaran Tidak Berpotongan Dalam



Gambar 4.18. Jarak dari M_1 ke M_2 , adalah nol atau $M_1=M_2$ dan $r_2 > r_1$

Kalau kedua lingkaran $L_1 = 0$ dan $L_2 = 0$ maka berkas lingkaran itu $L_1 + \lambda L_2 = 0$1)

L_1 dan L_2 disebut lingkaran dasar, dan titik potongnya (nyata atau tidak) disebut titik-titik dasar. Paramater λ harus linier.

Untuk tiap harga λ terdapat sebuah lingkaran dari berkas itu, dan disebut anggota berkas.

Semua anggota dari berkas selalu melalui dua titik dasar berkas.

Bukti :

Misalkan titik dasar itu (x_1, y_1) .

(x_1, y_1) pada $L_1 = 0$ berarti : $(L_1) = 0$ untuk $x = x_1, y = y_1$

(x_1, y_1) pada $L_2 = 0$ berarti : $(L_2) = 0$ untuk $x = x_1, y = y_1$

Jadi : $(L_1 + \lambda L_2) = 0$ untuk $x = x_1, y = y_1$

Hal ini berarti, bahwa $L_1 + \lambda L_2 = 0$ untuk setiap harga λ senantiasa Melalui titik (x_1, y_1) .

Bahwa semua anggota berkas melalui dua titik dasar tadi, dapatlah dijelaskan sebagai berikut.

Suatu lingkaran ditentukan oleh tiga ketentuan atau tiga titik yang tidak segaris letaknya.

Untuk menentukan tiap anggota berkas, hanya lah diperlukan sebuah titik lagi.

Dengan sendirinya berlaku :

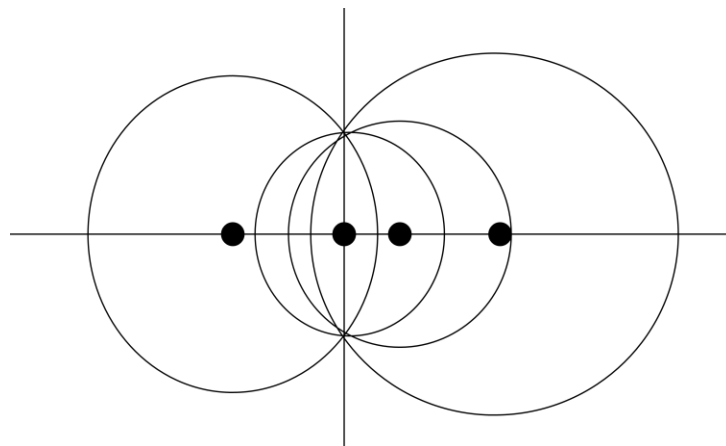
- I. Kalau kedua titik dasar itu nyata, maka semua anggota dari berkas berpotongan di titik itu. Anggota berkas yang terkecil adalah lingkaran yang bergaris tengah = garis hubung kedua titik dasar itu.
- II. Kalau kedua titik dasar itu berimpit, tentulah semua anggota dari berkas juga melalui dua titik yang berimpit itu, dengan perkataan lain : semua anggota dari berkas menyinggung kedua lingkaran dasar di titik singgungnya. Dalam berkas hanyalah terdapat sebuah lingkaran yang berjari-jari nol, atau lingkaran-nol.
- III. Kalau kedua lingkaran dasar itu tidak berpotongan, jadi kedua titik dasar itu imajiner, tentulah semua anggota dari berkas juga tidak berpotongan. Dalam berkas terdapat dua buah lingkaran nol.

Secara analitis hal yang diatas dapat dijelaskan sebagai berikut :

Ambil sebuah berkas lingkaran, $x^2 + y^2 + \lambda x + k = 0$ terdiri atas lingkaran $x^2 + y^2 + k = 0$ dan garis $x = 0$, yang akan merupakan garis kuasa berkas (karena bentuk itu selalu menghasilkan lingkaran untuk tiap² harga λ , yang melalui titikpotong lingkaran dasar dan garis kuasa). Titik-titik dasarnya di dapat dari perpotongan $x = 0$ dan $x^2 + y^2 + k = 0$, yaitu titik $(0, \pm \sqrt{-k})$. Tiap anggota berpusat $(-\frac{1}{2}\lambda, 0)$ dan berjari-jari $= \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - k}$

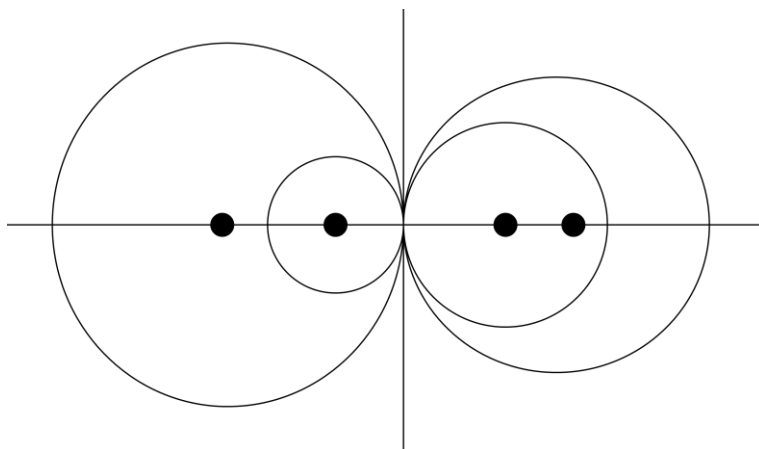
- I. Kalau $k < 0$, tentulah titik-titik dasar $(0, \pm \sqrt{-k})$ nyata. Dalam berkas tidak terdapat lingkaran nol, sebab $\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - k}$ tidak mungkin nol. Lingkaran yang terkecil ialah lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari $\sqrt{-k}$.
- II. Kalau $k = 0$, tentulah kedua titikdasar itu berimpit. Dalam berkas terdapat sebuah lingkaran nol, yaitu kalau $\lambda = k = 0$.
- III. Kalau $k > 0$, tentulah kedua titik dasar $(0, \pm \sqrt{-k})$ imajiner. Dalam berkas terdapat dua buah lingkaran-nol, ialah apabila $\frac{1}{4}\lambda^2 - k = 0$ atau $\lambda = \pm 2\sqrt{k}$. Kedua lingkaran-nol ini disebut titik hilang atau titik-Poncelet (P_1 dan P_2).

Contoh untuk berkas I



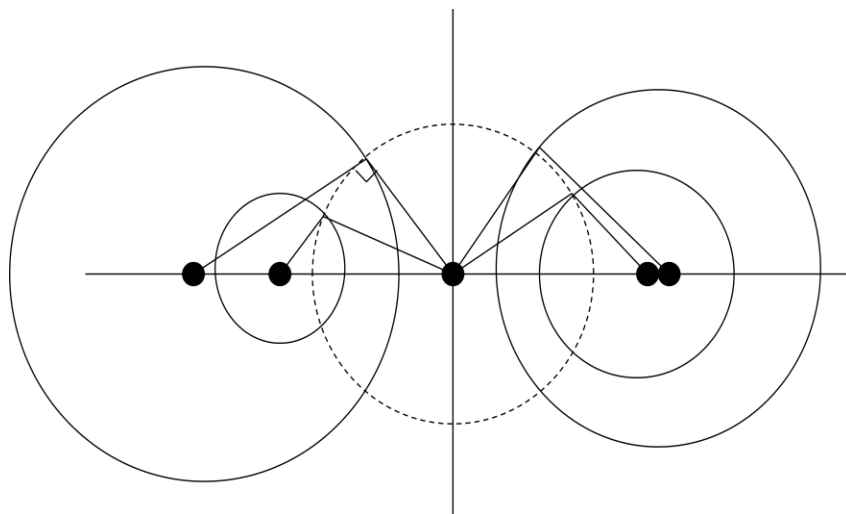
Gambar 4.21. Berkas Lingkaran dengan $k < 0$.

Contoh untuk berkas II



Gambar 4.22. Berkas Lingkaran dengan $k = 0$.

Contoh untuk berkas III



Gambar 4.23. Berkas Lingkaran dengan $k > 0$

Rangkuman

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tersebut disebut pusat lingkaran dan jarak yang sama adalah jari-jari lingkaran.
2. Bentuk baku persamaan lingkaran dengan pusat di (a, b) dan jari-jari r adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

3. Posisi Titik $P(x_1, y_1)$ terhadap Lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$P(x_1, y_1)$ pada lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

$P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$

$P(x_1, y_1)$ di dalam lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$

4. Persamaan parameter lingkaran $\therefore x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.
5. Kemungkinan kedudukan garis $y = mx + n$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ ada 3 sebagaimana berikut ini.
 - a. Garis memotong lingkaran, jika $D > 0$
 - b. Garis menyinggung lingkaran jika $D = 0$
 - c. Garis tidak memotong lingkaran jika, $D < 0$

$$\text{dengan } D = (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2)$$

6. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik (x_1, y_1) adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$.
7. Persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik (x_1, y_1) adalah

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

8. Persamaan garis kutub di titik $P(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

adalah
$$x_0x + y_0y + \frac{1}{2}A(x - x_0) + \frac{1}{2}B(y - y_0) + C = 0$$

- a. Jika titik P diluar $\odot$, maka garis kutubnya berupa tali busur singgung
- b. Jika titik P pada $\odot$, maka garis kutubnya merupakan garis singgung lingkaran
- c. Jika titik P dalam $\odot$, maka garis kutubnya tidak memotong.

9. Kalau $P(x_1, y_1)$ dan $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
maka kuasanya P terhadap lingkaran adalah $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$.
10. Persamaan Garis Kuasa $P(x_1, y_1)$ terhadap L_1 dan L_2 , dengan persamaan :

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2r_1 = 0 \rightarrow \text{pusatnya } (-a, -b)$$

$$L_2 \equiv x^2 + y^2 + 2px + 2qy + 2r_2 = 0 \rightarrow \text{pusatnya } (-p, -q) \text{ adalah}$$

$$L_1 - L_2 = 0$$

11. Garis kuasa tegak lurus sentral.
12. Tiga buah lingkaran hanya mempunyai sebuah titik kuasa, yakni titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap tiga lingkaran.
13. Posisi sebuah lingkaran terhadap lingkaran lainnya ada 4, yaitu :
- Kedua lingkaran berpotongan pada dua titik.
 - Kedua lingkaran bersinggungan luar.
 - Kedua lingkaran tidak bersinggungan dalam.
 - Kedua lingkaran tidak berpotongan luar.
 - Kedua lingkaran tidak berpotongan dalam.

SOAL-SOAL:

- Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(-1, 2)$ dan berpusat di jari-jari 5. Tentukan juga titik potong terhadap kedua sumbu.
- Tentukan persamaan lingkaran yang berjari-jari 2 dan yang menyinggung sumbu- x positif dan sumbu- y negatif.
- Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang mempunyai persamaan $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$. Bagaimanakah lingkaran yang persamaannya tidak mengandung bilangan tetap?
- Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang mempunyai persamaan $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$. Bagaimanakah lingkaran yang persamaannya tidak mengandung suku dengan x ?
- Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(-3, 2)$ dan yang menyinggung garis $3x - 4y = 8$.

6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui (1, 3), (6, -2) dan (-3, -5). Tentukan juga pusat dan jari-jarinya.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0,0) dan berjari-jari 5, tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus pada garis $4x - 3y = 6$.
8. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang dapat ditarik dari (7,1).
9. Berapakah kuasa (3,2) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$? Di dalam atau di luar lingkaran terletak titik tersebut?
10. Tentukan persamaan-persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, yang:
 - a. sejajar sumbu x;
 - b. sejajar sumbu y;
 - c. sejajar garis $x + y + 2 = 0$;
 - d. tegak lurus garis $x + 2y + 3 = 0$.
11. Tentukan garis kuasa kedua lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ dan $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$.
12. Tentukan sebuah titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap ketiga lingkaran $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3$, $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ dan $(x + 5)^2 + y^2 = 16$.
13. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui O dan titik potong kedua lingkaran

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0 \text{ dan}$$

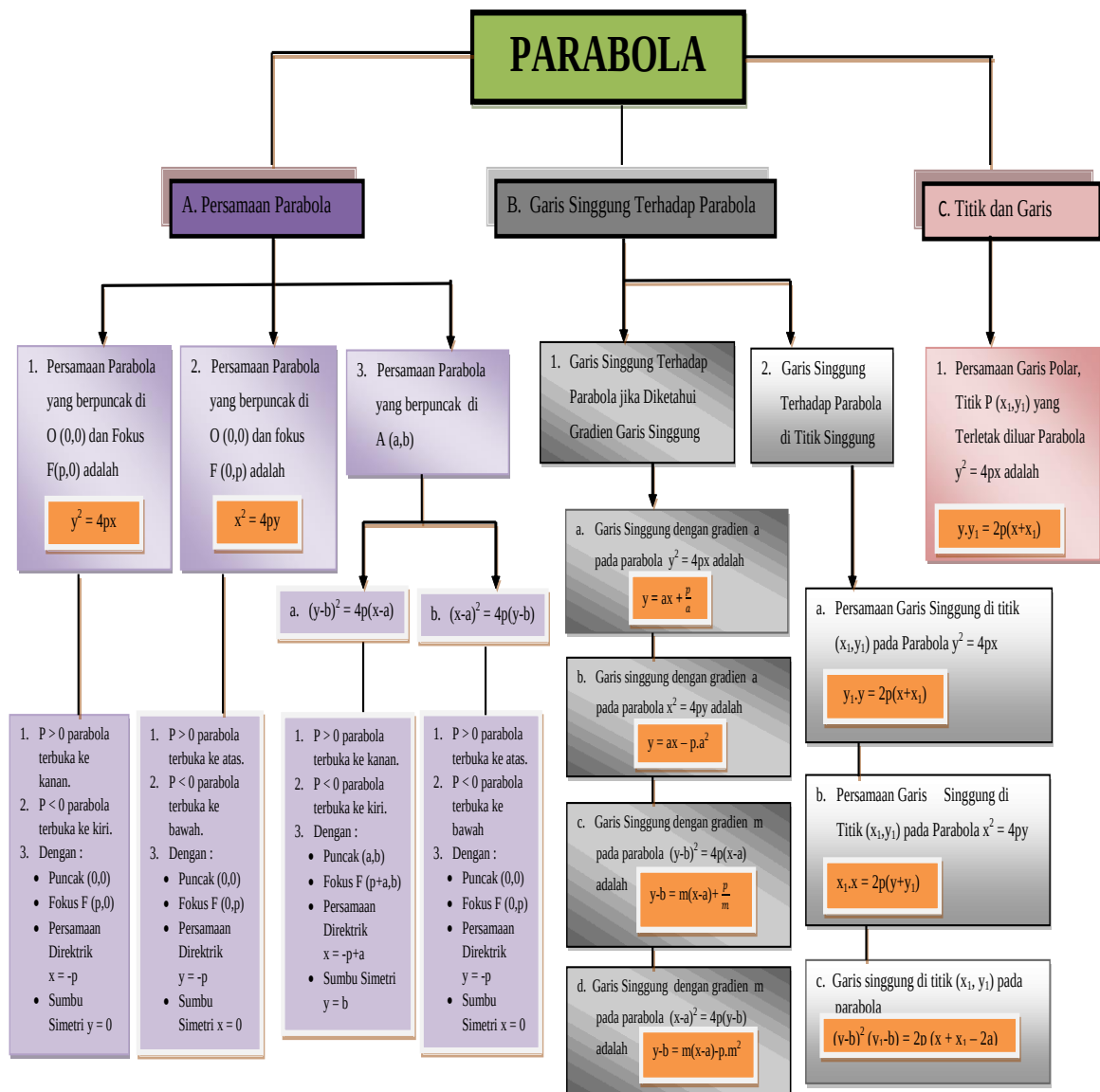
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 22 = 0$$
14. Buktikan bahwa kedua lingkaran berikut saling bersinggungan dan tentukan juga titik singgungnya

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$$
15. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan pada kedua lingkaran

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \text{ dan } 4x^2 + 4y^2 + 28x + 20y + 65 = 0.$$
16. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$, tegak lurus melalui titik (6,1) dan pusatnya terletak pada garis $9x + 4y = 47$.

BAB V PARABOLA

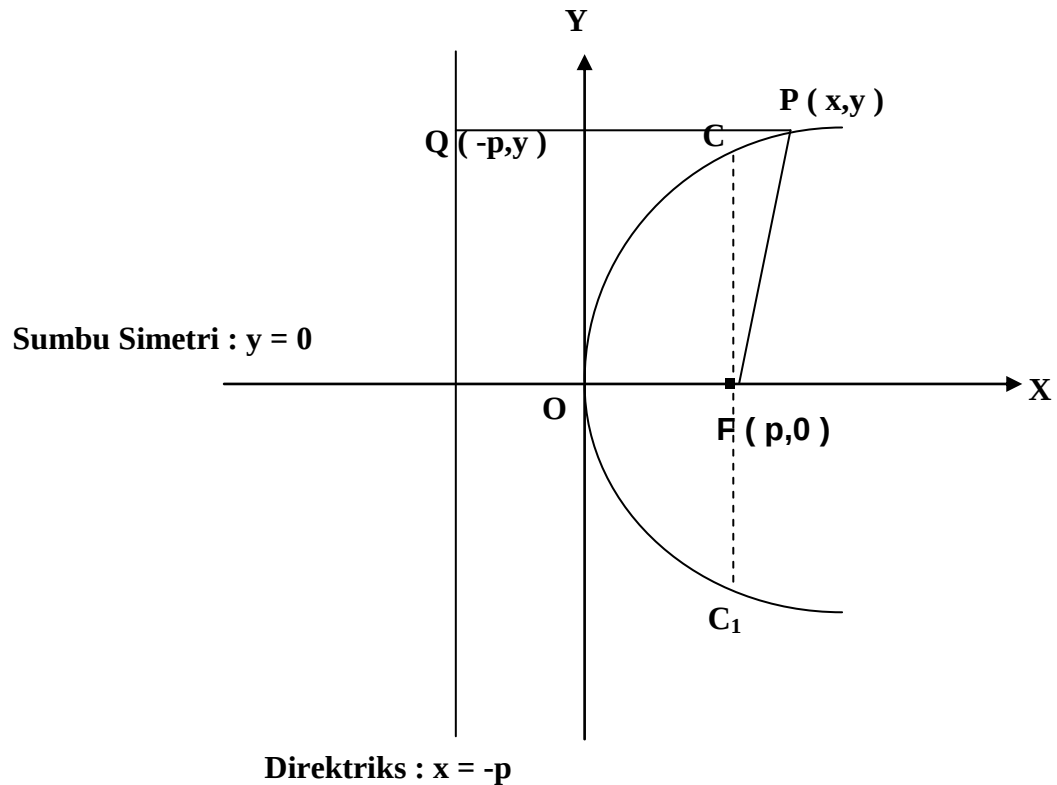


Gambar 5.1. Peta Konsep Parabola

A. Persamaan Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap suatu titik tertentu dan garis tertentu. Titik –tertentu itu disebut titik api (fokus) dan garis tertentu itu disebut direktri.

1. Persamaan Parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dan fokus $F(p,0)$



Gambar 5.2. Parabola berpuncak di $(0,0)$ dan Fokus $(p,0)$

Dari gambar diatas, $O(0,0)$ merupakan puncak parabola, garis g adalah direktri parabola dengan persamaan direktri $x = -p$, $F(p,0)$ merupakan fokus parabola, sumbu x merupakan sumbu simetri parabola dengan persamaan $y = 0$ dan CC_1 adalah panjang latus rectum dari parabola.

Misalkan $P(x,y)$ adalah sebarang titik pada parabola, maka berdasarkan definisi parabola berlaku :

$$\text{Jarak } PF = \text{Jarak } PQ$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

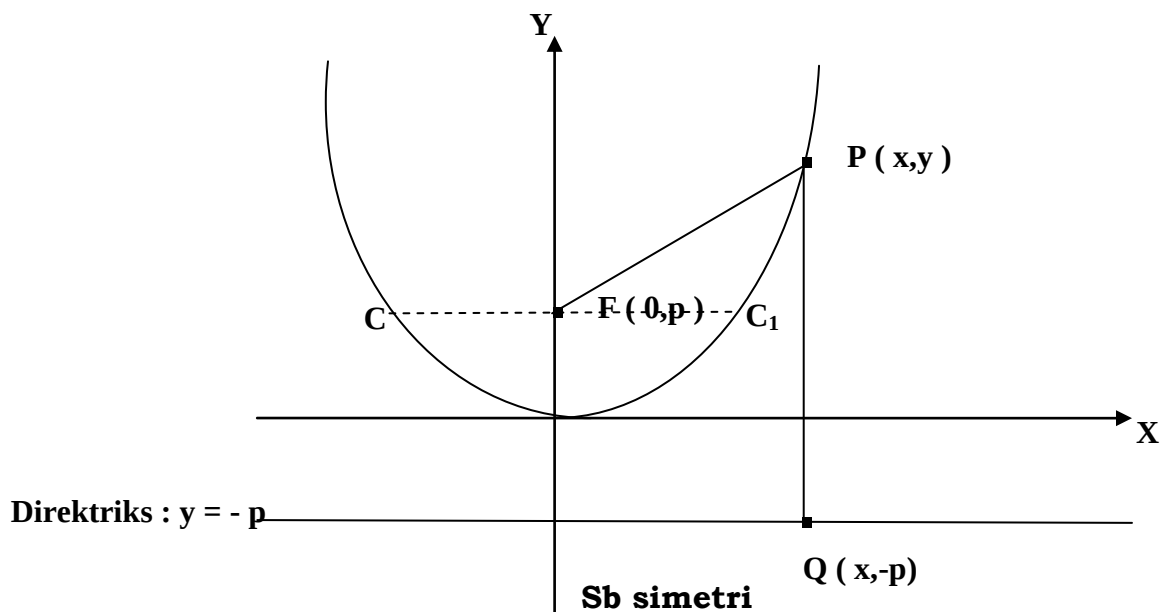
$$y^2 = 4px$$

adalah persamaan parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dengan fokus $F(p, 0)$.

Catatan :

1. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka kekanan
2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka kekiri.
3. Dengan :
 - Puncak $(0,0)$
 - Fokus $F(p, 0)$
 - Persamaan direktriks: $x = -p$
 - Persamaan sumbu simetri: $y = 0$

2. Persamaan Parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dan fokus $F(0,p)$



Gambar 5. 3. Persamaan Parabola Berpuncak di $O(0,0)$

Misalkan titik $P(x,y)$ adalah sembarang titik pada parabola, berdasarkan definisi parabola berlaku :

$$\text{Jarak PF} = \text{Jarak PQ}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$-4py + x^2 = 0$$

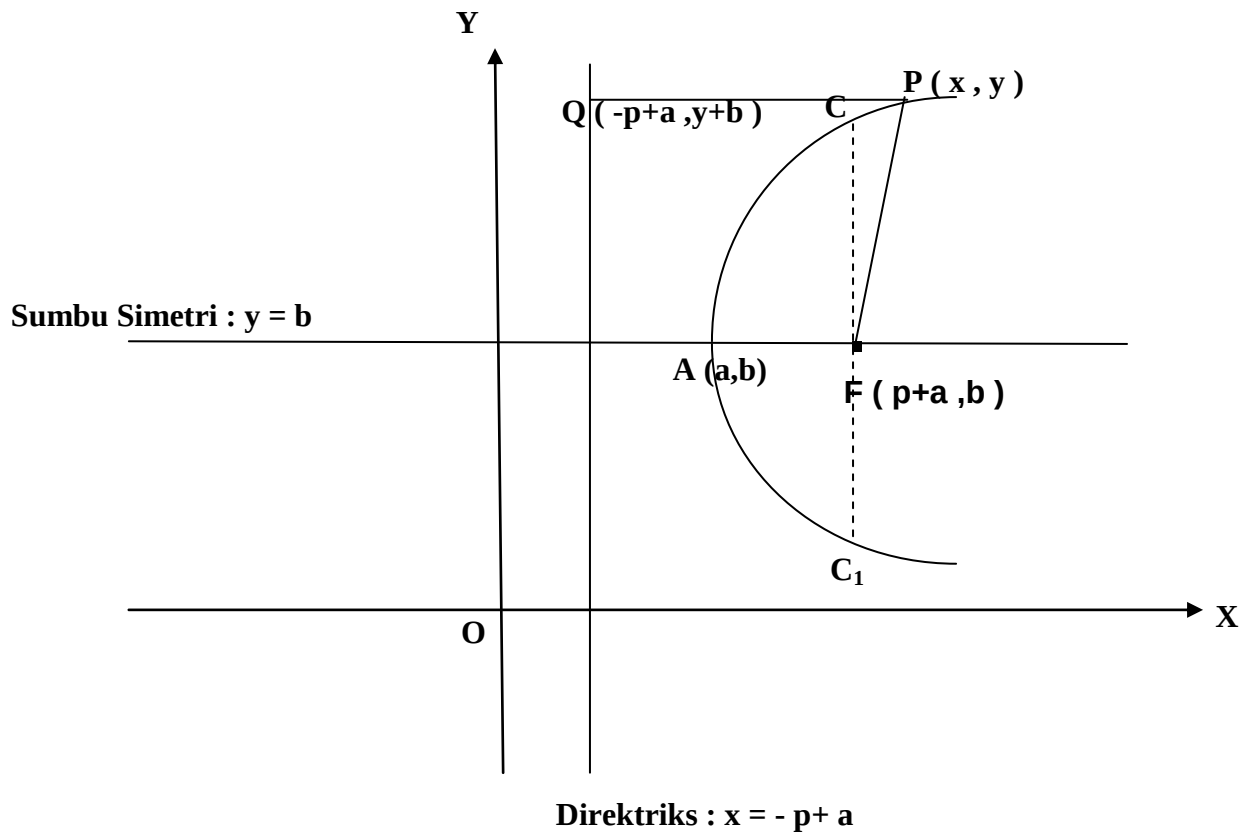
$$x^2 = 4py$$

adalah persamaan parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dengan fokus $F(0,p)$.

Catatan :

1. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka keatas.
2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka kebawah.
3. Dengan :
 - Puncak $(0,0)$
 - Fokus $F(0, p)$
 - Persamaan direktri : $y = -p$
 - Persamaan sumbu simetri : $x = 0$

3. Persamaan parabola yang berpuncak di A(a,b)



Gambar 5. 4. Parabola yang berpuncak di (a,b)

Persamaan parabola yang berpuncak di A(a,b) adalah :

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

Catatan :

1. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka kekanan
2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka kekiri.
3. Dengan : - Puncak (a,b)
 - Fokus F (p+a , b)
 - Persamaan direktriks : $x = - p + a$
 - Persamaan sumbu simetri : $y = b$

$$(x-a)^2 = 4p(y-b)$$

Catatan :

1. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka keatas.
2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka kebawah.
3. Dengan : - Puncak (a,b)
 - Fokus $F (a , p + b)$
 - Persamaan direktriaks : $y = - p + b$
 - Persamaan sumbu simetri : $x = a$

☞ Contoh 1

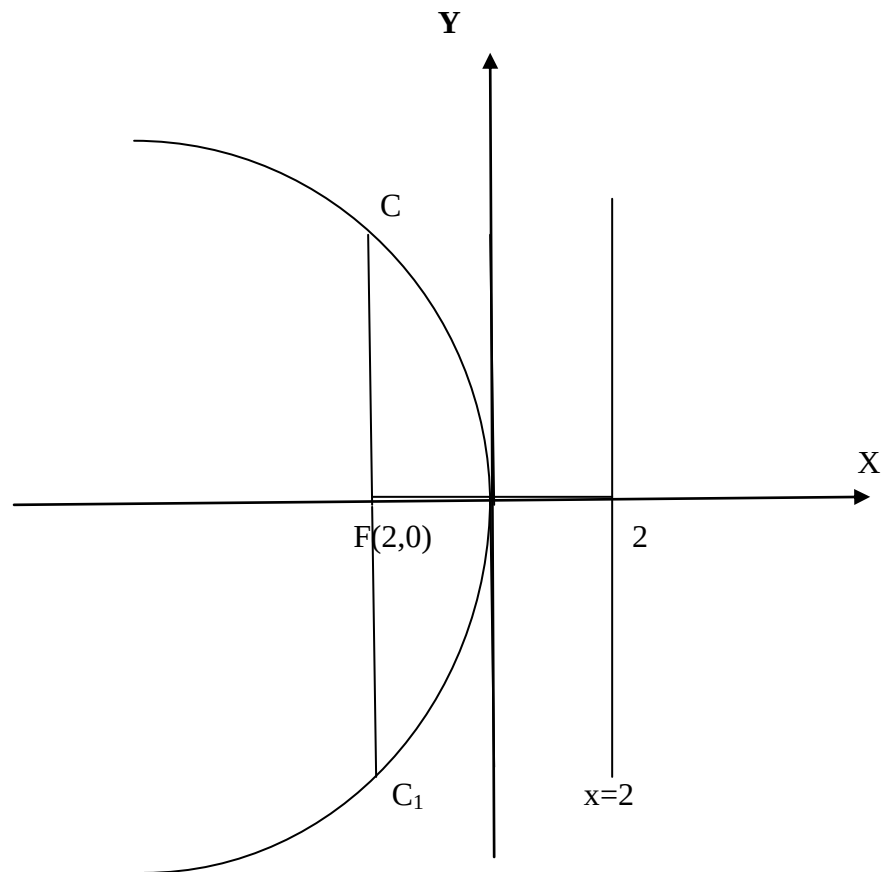
Tentukan koordinat fokus dan persamaan sumbu simetri, persamaan direktriaks dan panjang latus rectum dari persamaan parabola $y^2 = 8x$!

Penyelesaian:

Diketahui persamaan parabola $y^2 = -8x$, dimana persamaan umum parabola adalah $y^2 = 4px$. Sehingga diperoleh $4px = -8x$, maka $p = -2 < 0$. Jadi parabola terbuka ke kiri. Dari hasil yang didapat, diperoleh :

- Fokus parabola di $F (p , 0) = (-2 , 0)$
- Persamaan direktriaks : $x = - p = - (-2) = 2$
- Persamaan sumbu simetri : $y = 0$
- Dari fokus $F (-2, 0)$, $x = -2$, diperoleh $y^2 = -8.(-2) = 16$, sehingga diperoleh $y = \pm 4$. Jadi koordinat titik-titik ujung latus rectumnya adalah $(-2, 4)$ dan $(-2, -4)$. Dengan demikian panjang latus rectumnya adalah $2 \cdot 4 = 8$

Gambar parabola dapat dilihat sebagaimana berikut ini.



Gambar 5. 5. Parabola $y^2 = -8x$

☛ Contoh 2

Tentukan persamaan parabola jika titik puncaknya (2 , 3) dan titik fokusnya (6, 3)!

Penyelesaian:

Diketahui titik puncak (2 , 3,) = (a , b), maka diperoleh a = 2, b = 3, Titik fokus

$$\left. \begin{array}{l} F(6,3) \\ F(p+a,b) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} p + a = 6, \\ p + 2 = 6, \\ p = 4 \end{array}$$

Jadi persamaan parabolanya adalah

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

$$(y-3)^2 = 4.4(x-2)$$

$$(y-3)^2 = 16(x-2)$$

☞ Contoh 3

Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, sumbu simetri dan persamaan direktri dari persamaan parabola $y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$!

Penyelesaian:

$$y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$$

$$y^2 + 4y = 4x - 8$$

$$(y + 2)^2 - 2^2 = 4x - 8$$

$$(y + 2)^2 = 4x - 8 + 4$$

$$(y + 2)^2 = 4x - 4$$

$$\left. \begin{aligned} (y+2)^2 &= 4(x-1) \\ (y-b)^2 &= 4p(x-a) \end{aligned} \right\}$$

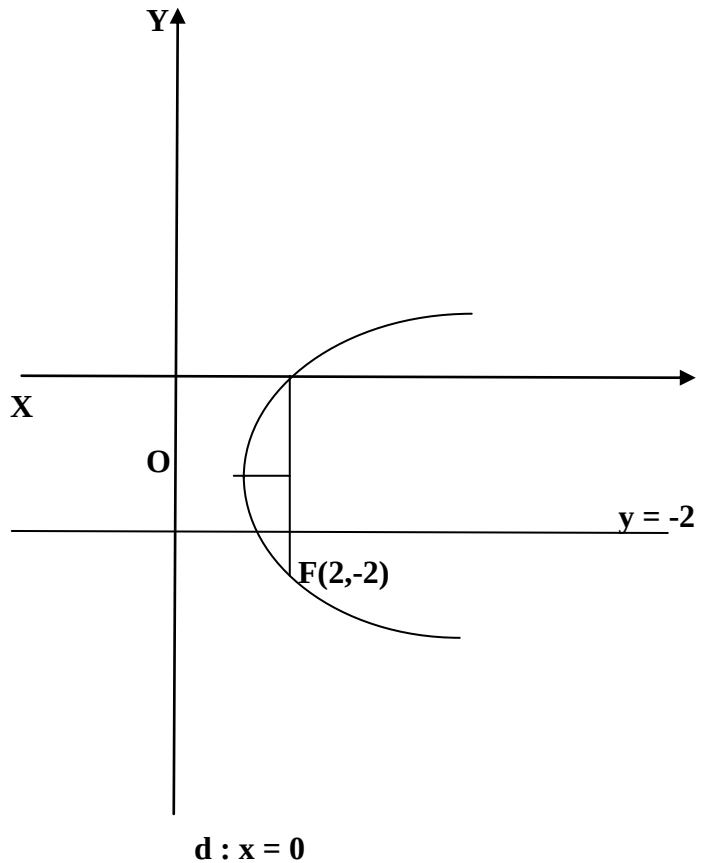
Karena $4p = 4$ maka $p = 1$

- titik puncak (a, b) atau $(1, -2)$

- Titik fokus $F(p + a, b)$
atau $F(2, -2)$

- Persamaan direktri : $x = -p + 1$
atau $x = 0$

- Persamaan sumbu simetri : $y = -2$



Gambar 5. 6. Parabola $y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$

Contoh 4:

Diketahui parabola $y^2 - 4y + 3x - 8 = 0$, tentukan puncak, fokus dan sumbu simetri serta gambarkan parabola tersebut!

Penyelesaian:

$$y^2 - 4y + 3x - 8 = 0$$

$$y^2 - 4y = -3x - 8$$

$$(y - 2)^2 = -3(x + 4) \text{ Ini berarti } 4p = -3 \text{ atau } p = -\frac{3}{4}$$

a. Puncak : $(-4, 2)$

b. Fokus : $(-4 + p, 2)$ atau $(-4 - \frac{3}{4}, 2)$ dan $(-\frac{19}{4}, 2)$

c. Direktris : $x = -4 - p$ atau $x = -4 + \frac{3}{4}$ atau $x = -\frac{13}{4}$

d. Sumbu Simetri : $y = 2$

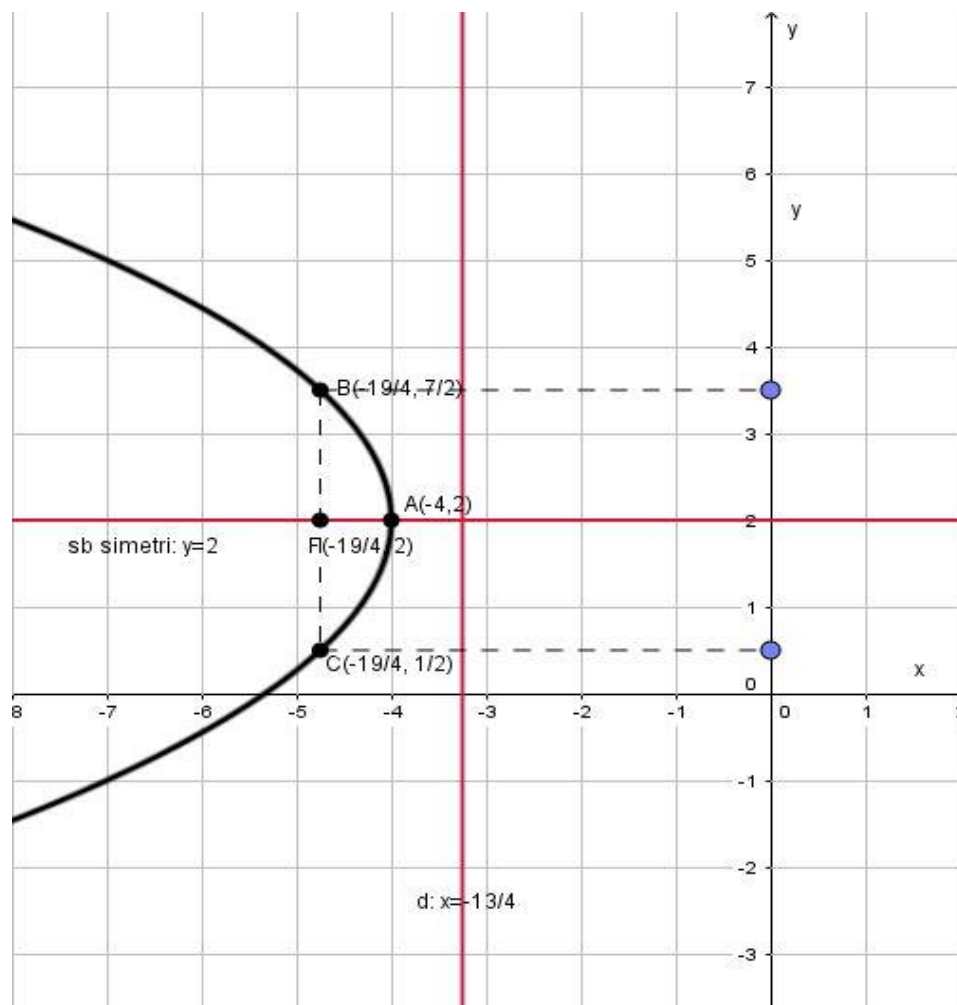
e. Latus Rectum : $x = -4 + p$ atau $x = -4 - \frac{3}{4}$ atau $x = -\frac{19}{4}$.

f. Panjang Latus Rectum $|LR| = |4p| = |4 \cdot (-\frac{3}{4})| = 3$

g. Titik-titik Latus Rectum

Jika $x = -\frac{19}{4}$ maka $(y - 2)^2 = -3(-\frac{19}{4} + 4)$ atau $(y - 2)^2 = -3(-\frac{3}{4})$ atau $(y - 2) = \pm \frac{3}{2}$.

Diperoleh yaitu $y_1 = \frac{3}{2} + 2$ dan $y_2 = -\frac{3}{2} + 2$.



Gambar 5.7. Parabola $y^2 - 4y + 3x - 8 = 0$.

B. Garis Singgung Terhadap Parabola

1. Garis Singgung Terhadap Parabola Jika Diketahui Gradien Garis Singgung

Akan ditentukan persamaan garis singgung dengan gradien a terhadap parabola $y^2 = 4px$,

Misalkan garis singgung g dengan gradien a memiliki persamaan $g : y = ax + b$, dan parabola $y^2 = 4px$.

Karena garis berpotongan dengan parabola maka:

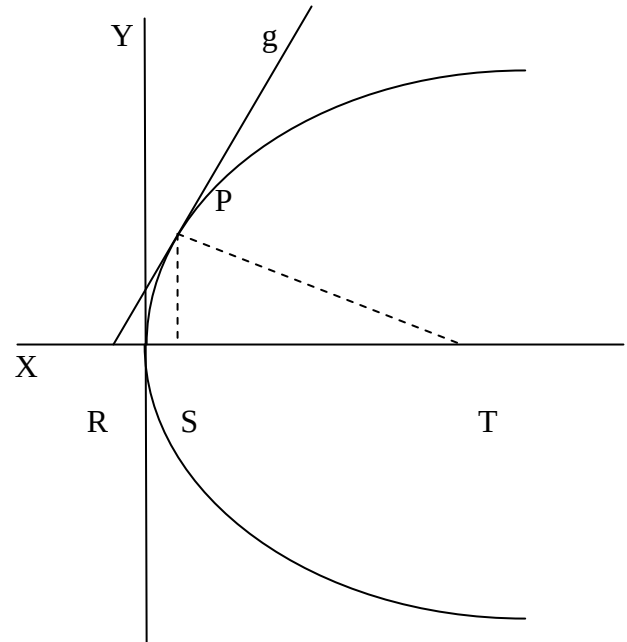
$$(ax + b)^2 = 4px$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + (2ab - 4p)x + b^2 = 0$$

Diskriminan : $D = (2ab - 4p)^2 - 4a^2b^2$

Ada 3 kemungkinan harga D , yaitu:

1. $D < 0$, garis g tidak memotong parabola.
2. $D > 0$, garis g memotong parabola pada dua titik.
3. $D = 0$, garis g menyinggung parabola.



Gambar 5.8. Garis Singgung Pada Parabola

Ini berarti

$$(2ab - 4p)^2 - 4a^2b^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow p^2 - pab = 0$$

$$\Leftrightarrow p(p - ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{p}{a}$$

Jadi, garis singgung dengan gradien a pada parabola $y^2 = 4px$, adalah :

$$y = ax + \frac{p}{a}$$

Catatan:

1. Jika PR = garis singgung di P, maka garis yang melalui P dan tegaklurus pada PR disebut normal.
2. Segmen garis RS disebut subtangens,
3. Segmen garis ST disebut subnormal. (PT = normal!)

Dengan cara yang sama, jika persamaan parabolanya $x^2 = 4py$ maka persamaan garis singgung dengan gradien a terhadap parabola $x^2 = 4py$ adalah :

$$y = ax - pa^2$$

Jika parabolanya $(y - b)^2 = 4p(x - a)$, maka persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap parabola ini adalah :

$$y - b = m(x - a) + \frac{p}{m}$$

dan jika parabolanya $(x - a)^2 = 4p(y - b)$, maka persamaan garis singgungnya adalah :

$$y - b = m(x - a) - pm^2.$$

☞ Contoh 1

Carilah persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap parabola $y^2 = 8x$, dan terhadap parabola $(x - 3)^2 = (y + 1)$. Kemudian carilah titik singgungnya.

Penyelesaian:

Sebagaimana diketahui, persamaan garis singgung dengan gradien garis a terhadap parabola $y^2 = 4px$ adalah $y = ax + \frac{p}{a}$.

Dengan menggunakan rumus ini, maka persamaan garis singgung dengan gradien 2, terhadap parabola $y^2 = 8x$ adalah

$$y = 2x + \frac{2}{2}$$

$$\leftrightarrow y = 2x + 1.$$

Dengan menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$, yaitu $y - b = m(x - a) - pm^2$, maka persamaan garis singgung dengan gradien 2 terhadap parabola $(x - 3)^2 = (y + 1)$ adalah

$$y + 1 = 2(x - 3) - \frac{1}{4} \cdot 2^2 \leftrightarrow y = 2x - 8.$$

Titik singgung garis $y = 2x + 1$ terhadap parabola $y^2 = 8x$ dicari sebagai berikut :

Substitusi $y = 2x + 1$ terhadap $y^2 = 8x$, diperoleh

$$(2x + 1)^2 = 8x$$

$$\leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

jadi titik singgungnya adalah $T(\frac{1}{2}, 2)$

Dengan cara yang sama seperti di atas maka titik singgung garis $y = 2x - 8$ terhadap parabola $(x - 3)^2 = (y + 1)$ adalah $T(4, 0)$.

2. Garis Singgung Terhadap Parabola Di Titik Singgung

Misalkan gradien garis singgung g adalah a .

Misalkan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) .

Maka persamaan garis singgunya dapat ditulis

$$g : y - y_1 = m(x - x_1).$$

Perpotongan garis g dengan parabola $y^2 = 4px$ adalah sebagai berikut :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\leftrightarrow x = \frac{y - y_1 + mx_1}{m} \dots\dots\dots *)$$

Substitusi $*)$ ke persamaan $y^2 = 4px$, diperoleh

$$y^2 = 4p \frac{y - y_1 + mx_1}{m}$$

$$\leftrightarrow my^2 - 4py + (4py_1 - 4pmx_1) = 0$$

Karena garis menyinggung parabola maka $D = 0$.

Atau

$$16p^2 - 4m(4py_1 - 4pmx_1) = 0$$

$$\leftrightarrow p^2 - py_1m + px_1m^2 = 0$$

$$\leftrightarrow x_1m^2 - y_1m + p = 0$$

$$m_{12} = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1}$$

Karena (x_1, y_1) pada parabola maka $y_1^2 = 4px_1$.

$$\text{Sehingga } m_{12} = \frac{y_1}{2x_1} \text{ atau } m = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1}$$

Substitusi $m = \frac{2p}{y_1}$ pada persamaan g : $y - y_1 = m(x - x_1)$, diperoleh

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1} (x - x_1)$$

$$\leftrightarrow y_1 y - y_1^2 = 2px - 2px_1$$

$$\leftrightarrow y_1 y = 2px - 2px_1 + 4px_1$$

$$\leftrightarrow y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Jadi, $y_1 y = 2p(x + x_1)$ adalah garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $y^2 = 4px$.

Dengan cara yang sama, persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) , terhadap parabola $x^2 = 4py$ adalah $x_1 x = 2p(y + y_1)$.

contoh :

tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 + 6y - 8x + 25 = 0$. Yang tegak lurus terhadap garis $2x + y - 3 = 0$.

Jawab :

Persamaan parabola $y^2 + 6y - 8x + 25 = 0$

$$y^2 + 6y - 8x + 25 = 0$$

$$y^2 + 6y = 8x - 25$$

$$(y+3)^2 - 9 = 8x - 25$$

$$(y+3)^2 = 8x - 16$$

$$(y+3)^2 = 8(x - 2)$$

$$a = 2 \text{ dan } b = -3$$

garis yang menyinggung $2x + y - 3 = 0$

$$y = -2x + 3$$

kemiringan = $m = -2$ karena tegak lurus maka $m = \frac{1}{2}$

maka diperoleh persamaan garis singgungnya yaitu:

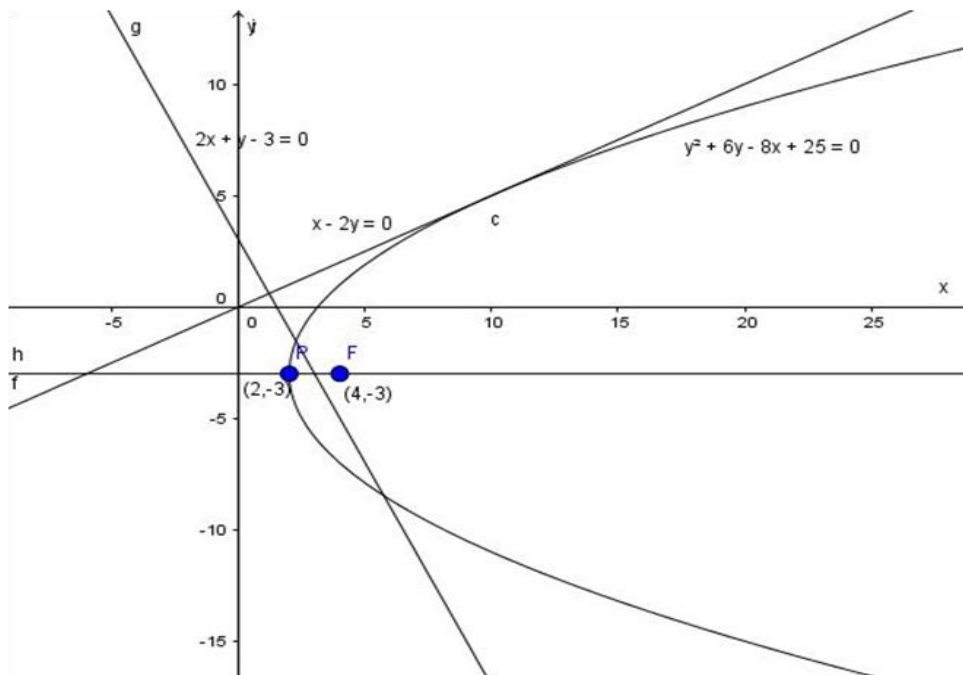
$$y - b = m(x - a) + \frac{p}{m}$$

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$y + 3 = \frac{1}{2}x - 1 + 4$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$x - 2y = 0$$



Gambar 5.9. Garis Singgung Pada Parabola

Contoh 2 :

Tentukan titik potong garis singgung parabola $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ yang mempunyai kemiringan 3 dengan sumbu koordinat.

Jawab:

Tulis persamaan parabola menjadi $(x - a)^2 = 4p(y - b)$

$$x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$$

$$x^2 - 4x = 4y + 8$$

$$(x - 2)^2 - 4 = 4y + 8$$

$$(x - 2)^2 = 4y + 12$$

$$(x - 2)^2 = 4(y + 3)$$

$$a = 2 \text{ dan } b = -3$$

nilai p...?

$$4p = 4 \text{ atau } p = 1$$

$$\text{Sehingga } y - b = m(x - a) - pm^2$$

$$y + 3 = 3(x - 2) - 3^2$$

$$y + 3 = 3x - 6 - 9$$

$$y = 3x - 18$$

$$3x - y - 18 = 0$$

Titik singgung parabola yaitu

$$3x - y - 18 = 0$$

$$y = 0, x = 6$$

Jadi, titik singgung parabola (6,0).

C. Titik Dan Garis Polar

Definisi: Kalau dari sebuah titik P (x_1, y_1) di luar suatu parabola ditarik dua buah garis singgung, maka garis penghubung p antara kedua titik singgungnya disebut garis polarnya P terhadap parabola, dan P adalah titikpolarnya garis p itu.

Persamaan garis polar titik P (x_1, y_1) yang terletak di luar parabola $y^2 = 4px$ adalah

$$yy_1 = 2p (x + x_1).$$

Bukti:

Karena Q(x_2, y_2) dan R(x_3, y_3) adalah titiksinggung-titiksinggung kedua garissinggung dari P(x_1, y_1) maka garissinggung di Q dan R berturut-turut adalah:

$$PQ \equiv yy_2 = 2p (x + x_2).... (1)$$

$$PR \equiv yy_3 = 2p (x + x_3).... (2)$$

P pada (1) berarti:

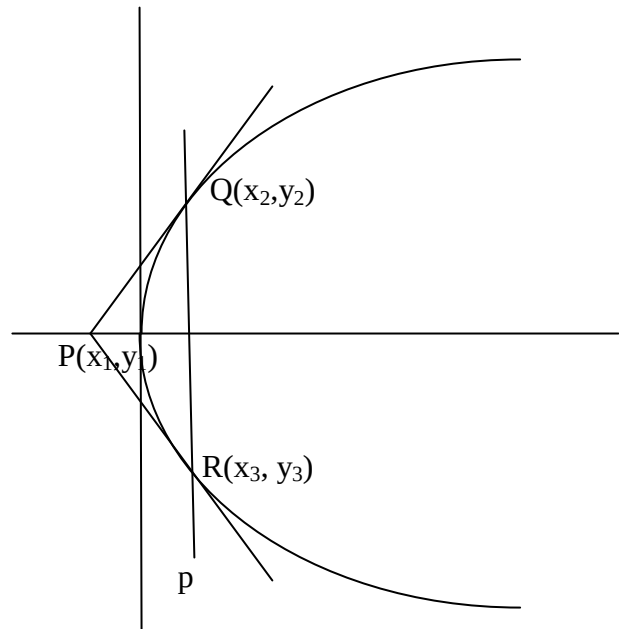
$$y_1 y_2 = 2p (x_1 + x_2).... (3)$$

P pada (2) berarti:

$$y_1 y_3 = 2p (x_1 + x_3).... (4)$$

Perhatikan suatu garis dengan persamaan:

$$y_1 y = 2p (x_1 + x).... (5)$$



Gambar 5.10. Garis Polar Titik P(x_1, y_1)

Berhubung dengan (3) tentulah titik Q terletak pada (5).

Berhubung dengan (4) tentulah titik R terletak pada (5).

Jadi, Q dan R terletak pada (5), yang berarti (5) ditentukan oleh Q dan R $\equiv$ (5) = garis polar titik $P(x_1, y_1)$ terhadap parabola $y^2 = 4px$ menurut definisi.

Rangkuman

1. Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap suatu titik tertentu dan garis tertentu. Titik –tertentu itu disebut titik api (fokus) dan garis tertentu itu disebut direktriks.
2. Persamaan Parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dan fokus $F(p,0)$

$$y^2 = 4p x$$

Catatan :

- a. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka kekanan
 - b. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka kekiri.
 - c. Persamaan direktriks: $x = -p$
 - d. Persamaan sumbu simetri: $y = 0$
3. Persamaan parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dengan fokus $F(0,p)$ adalah

Catatan :

- a. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka keatas.
 - b. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka kebawah.
 - c. Persamaan direktriks : $y = - p$.
 - d. Persamaan sumbu simetri : $x = 0$.
4. Garis singgung dengan gradien a pada parabola $y^2 = 4px$, adalah :

$$y = ax + \frac{p}{a}$$

5. Persamaan garis singgung dengan gradien a terhadap parabola $x^2 = 4py$ adalah :

$$y = ax - pa^2$$

6. Jika parabolanya $(y - b)^2 = 4p(x - a)$, maka persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap parabola ini adalah : $y - b = m(x - a) + \frac{p}{m}$.
7. Jika parabolanya $(x - a)^2 = 4p(y - b)$, maka persamaan garis singgungnya adalah :

$$y - b = m(x - a) - pm^2.$$
8. Garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $y^2 = 4px$ adalah $y_1 y = 2p(x + x_1)$.
9. Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) , terhadap parabola $x^2 = 4py$ adalah

$$x_1 x = 2p(y + y_1).$$
10. Dari sebuah titik $P(x_1, y_1)$ di luar suatu parabola ditarik dua buah garis singgung, maka garis penghubung p antara kedua titik singgungnya disebut garis polarnya P terhadap parabola, dan P adalah titikpolarnya garis p itu.
11. Persamaan garis polar titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak di luar parabola $y^2 = 4px$ adalah

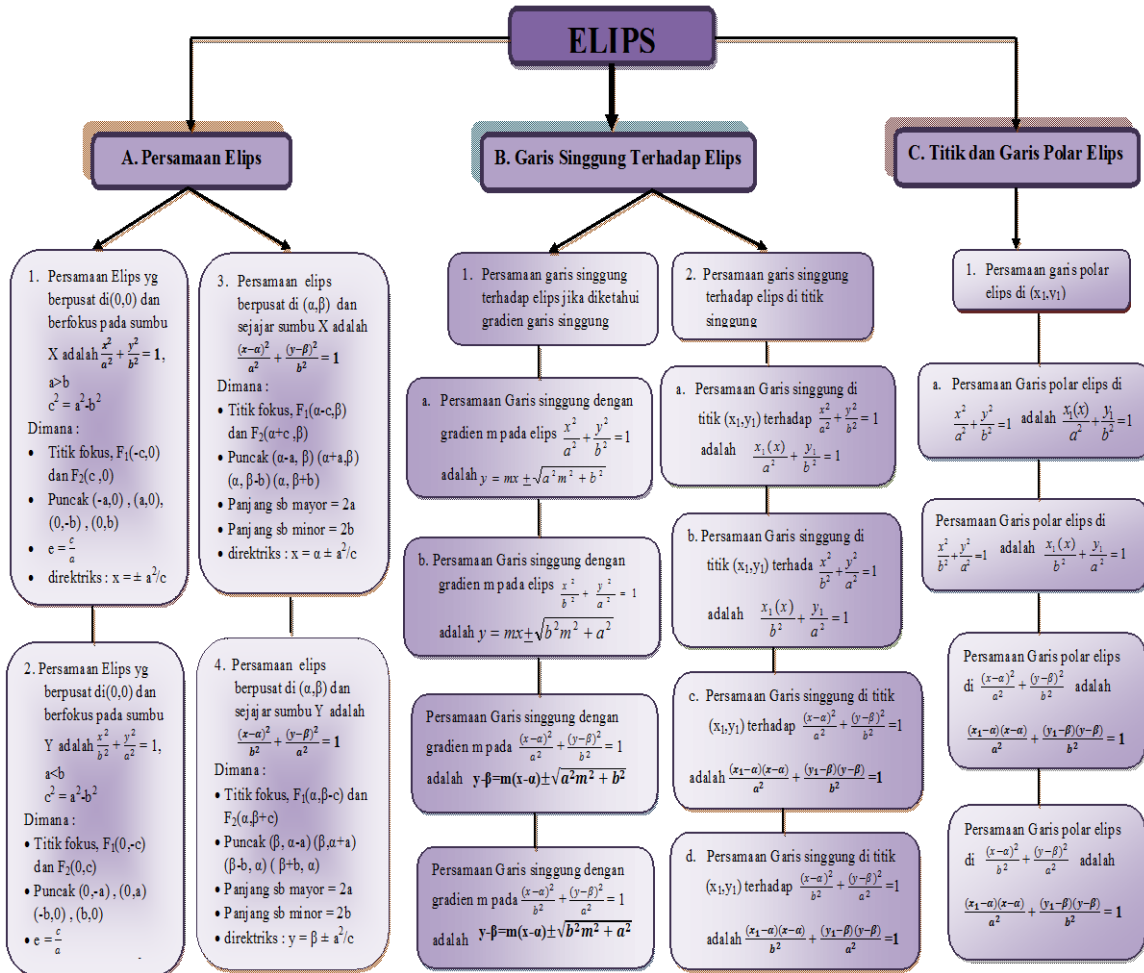
$$yy_1 = 2p(x + x_1).$$

SOAL-SOAL:

1. Gambarkan grafik parabola-parabola berikut.
 - a. $y^2 = 4x$
 - b. $y^2 = -4x$
 - c. $x^2 = 4y$
 - d. $x^2 = -4y$
2. Tentukan fokus dan direktri parabola-parabola pada soal 1.
3. Tentukan persamaan parabola jika diketahui
 - a. titik puncak $(0, 0)$; fokus $(3, 0)$.
 - b. Titik puncak $(0, 0)$; direktri $x = 7$.
 - c. titik puncak $(4, -5)$; fokus $(1, -5)$.
 - d. Sumbu Simetri $y = 0$; melalui titik $(3, 2)$ dan $(2, -3)$.
4. Gunakan definisi parabola untuk mendapatkan persamaan parabola dengan fokus $(2, 1)$ dan direktri $x + y + 1 = 0$.
5. a. Tentukan persamaan parabola dengan sumbu simetri sejajar sumbu y dan melalui titik-titik $(0, 3)$, $(2, 0)$ dan $(3, 2)$.

- b. Tentukan persamaan parabola dengan sumbu simetri sejajar sumbu x dan melalui titik-titik seperti a).
6. Gambarkan grafik parabola : $y^2 - 2y + 5 = 2x$ dan $x^2 - 2x + 5 = 2y$. Tentukan fokus, direktriks dan latus rectum dari kedua parabola tersebut.
7. Dalam hal manakah garis $y = ax - 3$
 - a. memotong pada dua titik,
 - b. menyinggung,
 - c. tidak memotong, parabola $y^2 = 4x$.
8. Tentukan persamaan garis singgung yang berkoefisien arah 2 pada parabola $y^2 = 8x$. tentukan pula titik singgung dan persamaan normal di titik itu?
9. Carilah persamaan parabola yang berpuncak di O menyinggung sumbu-y dan menyinggung pula garis $x - y + 1 = 0$. Manakah titik singgungnya?
10. Tentukan persamaan normal di titik (1, -2) pada parabola $y^2 = 4x$.
11. Tentukan persamaan normal yang sejajar dengan garis $x - y = 0$ terhadap parabola $y^2 = 2x$.
12. Tentukan persamaan-persamaan garis singgung yang melalui (-2, -3) pada parabola $y^2 = 8x$, serta persamaan garis penghubung kedua titik singgungnya. Sesuaikan persamaan ini dengan rumus garis polar suatu titik terhadap parabola?
13. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak dititik pangkal O melalui (6, -6) dan menyinggung sumbu-y.
14. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak dititik pangkal O melalui (6, -6) dan menyinggung sumbu-x.
15. Tentukan persamaan normal yang sejajar dengan garis $x - y = 0$ terhadap parabola $y^2 = 2x$.
16. Buktikan bahwa titik puncak pada parabola adalah titik terdekat terhadap titik fokus.

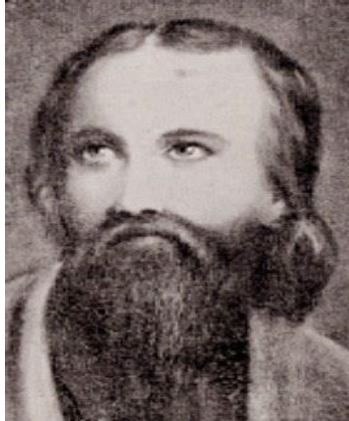
BAB VI E L I P S



Gambar 6.1. Peta Konsep Elips

Sejarawan Matematika

Apollonius (262 SM – 190 SM)



Apollonius yang menjadi matematikawan lahir di Perga, Pamphylia yang sekarang dikenal dengan sebutan Murtina atau Murtana, terletak di Antalya, Turki. Saat muda usia Apollonius pergi ke Alexandria dimana dia belajar di bawah bimbingan para pengikut Euclid sebelum mengajar di sana. Kemudian, Apollonius pergi ke Pergemum. Apollonius bertemu dengan Eudemos yang menulis buku *Sejarah Geometri (History of Geometry)*.

Karya-karya yang hilang

Karya-karya Apollonius banyak yang hilang. Skema bilangan dari Apollonius barangkali adalah salah satu yang terselamatkan dari bagian terakhir buku II berjudul "*Kumpulan Matematikal*" ("*Mathematical Collections*") dari Pappus (Semua buku I dan awal buku II hilang). Apollonius juga menulis *Cara Cepat* ("*Quick Delivery*") yang berisikan pengajaran tentang tip-tip atau teknik-teknik penghitungan cepat. Diketahui bahwa karya-karya Apollonius yang hilang seperti: penjabaran nisbah/ratio (*Cutting-Off Ratio*); penjabaran luas bidang ("*Cutting-Off of an Area*"); seksi penentu ("*On Determinate Section*"); Tangen; titik potong (*vergings*) dan *Plane Loci*. *

Karya puncak, "Conics" ("Kerucut")

Buku pertama "*Conics*" ("*Kerucut*") membahas segala sesuatu tentang hal-hal mendasar tentang kurva-kurva yang disebut "paling lengkap dan lebih umum dibanding pengarang-pengarang lain." Dalam buku ini pula disebutkan theorema dan transformasi koordinat dari sistem yang didasarkan pada tangen dan diameter pada titik P yang berada pada kerucut ke

dalam sistem baru yang ditentukan oleh tangen dan diameter dari titik Q yang berada pada kurva yang sama. Apollonius sangat mengenal karakteristik hiperbola dengan asimtot sebagai absisnya. Persamaan $xy = c^2$ adalah hiperbola sama sisi yang mirip dengan rumus hukum Boyle tentang gas.

Buku kedua melanjutkan bahasan tentang tangen dan diameter. Dengan menggunakan proposisi-proposisi dan gambar-gambar kurva.

Buku ketiga disebut oleh Apollonius adalah yang paling membanggakan karena disebutkan berisikan *theorema-theorema* yang bermanfaat untuk melakukan (operasi) sintesis dan *solid loci* penentuan limit. Disebutkan olehnya bahwa Euclid belum menyinggung topik ini. *Locus* tiga dan empat garis memegang peran penting dalam matematika sejak Euclid sampai Newton. Buku keempat menggambarkan keinginan pengarangnya untuk menunjukkan “Ada banyak cara bagian kerucut dapat saling berpotongan.” Ide tentang hiperbola dua cabang yang berlawanan arah adalah gagasan Apollonius.

Asal-usul nama

Archimedes sudah mencetuskan istilah parabola yang artinya bagian sudut kanan kerucut. Apollonius (barangkali melanjutkan penamaan dari Archimedes) mengenalkan kata elips dan hiperbola dalam kaitannya dengan kurva-kurva tersebut. Istilah “elips”, “parabola”, dan “hiperbola” bukanlah penemuan Archimedes maupun Apollonius; mereka mengadaptasi kata dan artinya dari para pengikut Pythagoras (pythagorean), dalam menyelesaikan persamaan-persamaan kuadrat untuk aplikasi mencari luas. Elips berarti kurang atau tidak sempurna digunakan untuk memberi nama apabila luas persegi panjang pada bidang yang diketahui disetarakan dengan bagian garis tertentu yang diketahui hasilnya kurang. Hiperbola yang artinya kelebihan dipakai apabila luas persegi panjang pada bidang yang diketahui disetarakan dengan bagian garis tertentu yang diketahui hasilnya lebih. Parabola yang artinya di samping atau pembanding) tidak mengindikasikan lebih atau kurang. Apollonius menggunakan ketiga istilah di atas dalam konteks baru yaitu sebagai persamaan parabola dengan verteks pada titik asal, (0,0), sistem Kartesian, adalah $y^2 = lx$ ($l = \text{“latus rectum”}$ atau *parameter*) sekarang diganti dengan $2p$ atau bahkan $4p$.

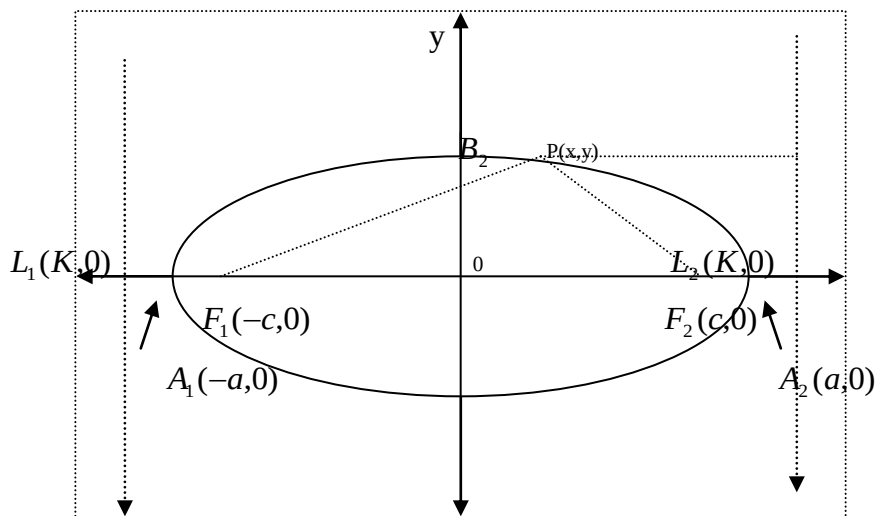
A. Persamaan Elips

Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu adalah tetap. Kedua titik tertentu itu disebut fokus.

1. Persamaan Elips yang berpusat di $O(0,0)$

Untuk menentukan persamaan elips yang berpusat di $O(0,0)$, kita pilih sebuah elips dengan sumbu utama berimpit dengan sumbu X, fokus di titik-titik $F_1(-c,0)$ dan $F_2(c,0)$ serta puncak di titik-titik $A_1(-a,0)$ dan $A_2(a,0)$.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 6.2. Elips berpusat di $(0,0)$ dan Sumbu Mayor Berimpit Sumbu X

Misalkan titik $P(x,y)$ adalah sembarang titik pada elips. Berdasarkan definisi elips, haruslah berlaku :

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

dimana

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \text{ dan}$$

$$PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Sehingga

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan, diperoleh

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan,

$$a^2 \{(x-c)^2 + y^2\} = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 = a^4 - 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2).$$

Jika $a^2 - c^2 = b^2$, maka persamaan di atas menjadi

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \text{atau}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Persamaan ini adalah persamaan ellips yang berpusat di $O (0,0)$ dan fokus di $F_1 (-c,0)$ dan $F_2 (c,0)$.

Contoh:

Gambar grafik dengan persamaan

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

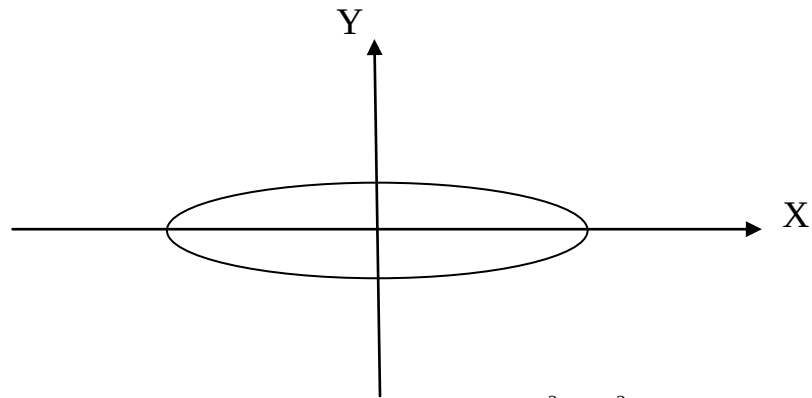
dan tentukan fokus serta keeksentrikannya.

Penyelesaian:

Karena $a = 6$ dan $b = 2$, maka $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$.

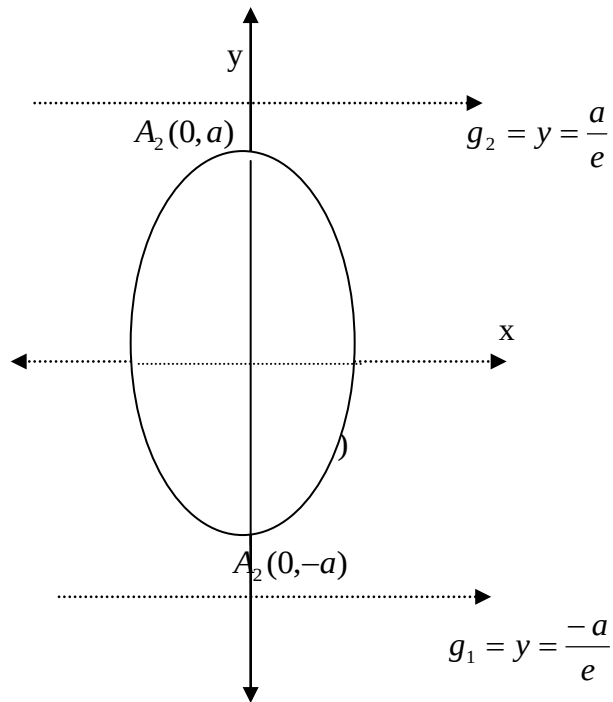
Sehingga fokus elips berada pada $(\pm c, 0) = (\pm 4\sqrt{2}, 0)$, dan $e = c/a \approx 0,94$.

Elips itu dapat di lihat pada gambar berikut ini.



Gambar 6.3. Ellips dengan Persamaan $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$

Berikut ini adalah gambar yang memperlihatkan sebuah ellips yang berpusat di $O (0,0)$, sumbu utama berimpit dengan sumbu Y , fokus di titik-titik $F_1 (0,-c)$ dan $F_2 (0,c)$, serta puncak di titik-titik $A_1 (0, -a)$ dan $A_2 (0, a)$.



Gambar 6.3. Elips berpusat di $(0,0)$ dan Sumbu Mayor berimpit dengan Sumbu Y

Dengan cara yang sama akan diperoleh:

1. Persamaan ellips $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ dimana $b^2 = a^2 - c^2$
2. Eksentrisitasnya adalah $e = \frac{c}{a}$
3. Persamaan direktriksnya adalah $g_1 \equiv y = -\frac{a}{e}$ dan $g_2 \equiv y = \frac{a}{e}$

Jadi, ada dua macam bentuk baku persamaan ellips yang berpusat di $O(0,0)$, yaitu :

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sering disebut **ellips horisontal**, sebab sumbu utamanya berimpit dengan sumbu x.

2. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, sering disebut **elips vertikal**, sebab sumbu utamanya berimpit dengan sumbu y.

Pada setiap persamaan di atas $a^2 > b^2$

Contoh 2

Sketsa grafik dengan persamaan

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

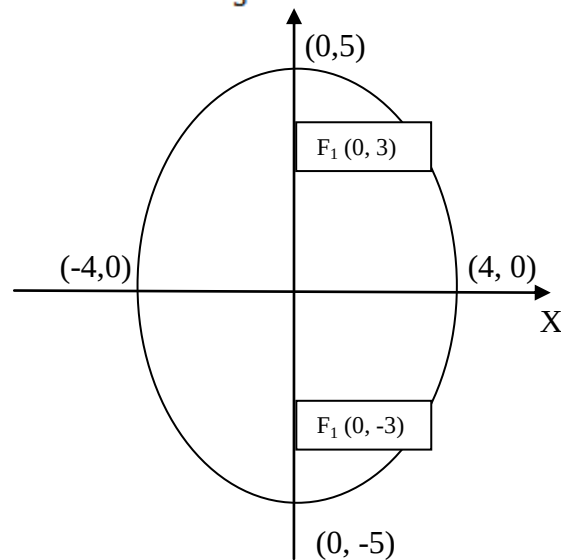
tentukan fokus dan keeksentrikannya

Penyelesaian:

Karena penyebut yang paling besar berada di bawah y^2 maka sumbu panjang elips berimpit dengan sumbu y. Karena $a = 5$ dan $b = 4$, maka $c = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Sehingga fokus elips berada di $(0, \pm 3)$ sedangkan $e = c/a = \frac{3}{5} = 0,6$

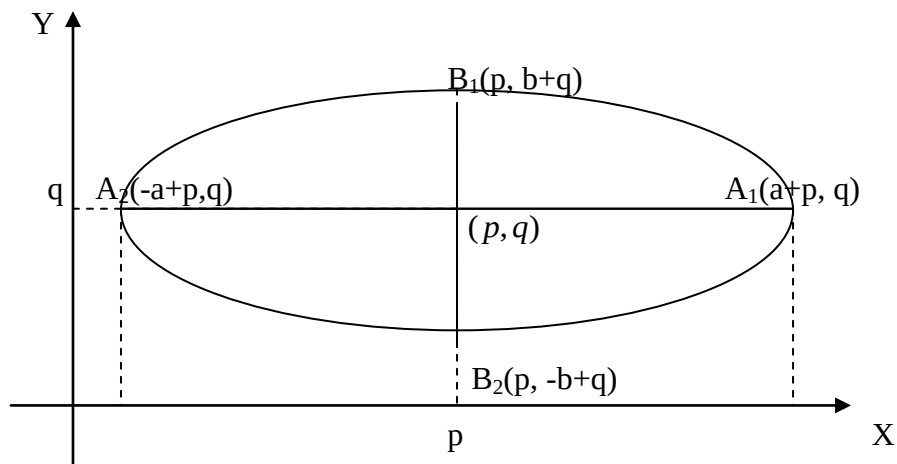
Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 6.4. Ellips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

2. Elips Berpusat di (p,q)

Apabila elips dengan pusat $O (0,0)$, fokus $F_1 (c,0)$ dan $F_2 (-c,0)$ dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ditranslasikan sejauh $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ maka pusat elips di titik (p,q).



Gambar 6.5. Elips Berpusat di (p, q)

Koordinat puncak menjadi :

$A_1(a + p, q)$, $A_2(-a + p, q)$, $B_1(p, b + q)$ dan $B_2(p, -b + q)$

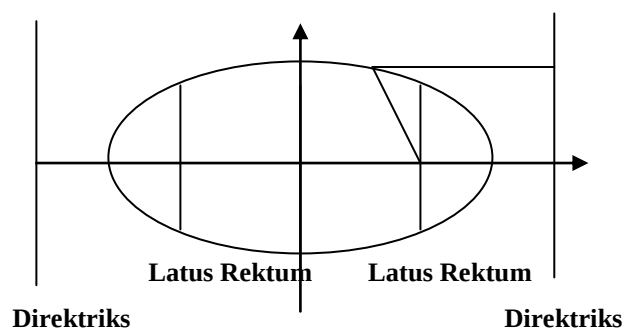
Koordinat fokus menjadi $F_1(c + p, q)$, dan $F_2(-c + p, q)$

Panjang sumbu mayor = $2a$

Panjang sumbu minor = $2b$

Persamaan elips menjadi $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$.

3. Direktri, Eksentrisitas, dan Panjang Latus Rectum



Gambar 6.6. Elips dengan Direktri dan Latus Rectum

Definisi :

Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jarak ke suatu titik dan suatu garis tetap harganya antara 0 dan 1.

Harga tetap itu adalah $\frac{c}{a}$ dengan $0 < \frac{c}{a} < 1$ dinamakan eksentrisitas dan dilambangkan dengan e.

Untuk elips dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan $b^2 = a^2 - c^2$ atau

$c^2 = a^2 - b^2$, diperoleh $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$ atau $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$ dan nilai $0 < \frac{c}{a} < 1$.

Jadi :

$$e = \frac{c}{a} \text{ atau } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Kedua garis l dan g disebut garis direktriks dengan persamaan :

$$l \equiv x = -\frac{a^2}{c} \text{ dan } g \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

Untuk elips dengan pusat (p,q), $l \equiv x = p - \frac{a^2}{c}$ dan $g \equiv x = p + \frac{a^2}{c}$

Garis l_1 dan l_2 disebut latus rectum dengan persamaan $x = -c$ dan $x = c$.

Akan dicari titik potong antara garis $x = c$ dengan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, diperoleh

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2}$$

$$= \frac{b^2 \cdot b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm \frac{b^2}{a}$$

Jadi panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a}$ atau $|y_1| + |y_2|$.

☛ Contoh

1. Tentukan persamaan direktriks, eksentrisitas, dan panjang latus rectum dari elips dengan persamaan :

a. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

b. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 36y = 44$

Penyelesaian:

- a. Elips dengan persamaan $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ berpusat di (2, -1).

Karena $a = 5$, $b = 4$ maka $c = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = \pm 3$

Sehingga persamaan direktriks : $x = p \pm \frac{c^2}{a}$ atau $x = 2 \pm \frac{9}{5}$

Sedangkan eksentrisitas, $e = \frac{c}{a}$ atau $e = \frac{3}{5}$.

Panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 16}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$

b. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 36y = 44$

$$\Leftrightarrow 16(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 4y) = 44$$

$$\Leftrightarrow 16(x+2)^2 + 9(y-2)^2 = 44 + 64 + 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

Elips berpusat di (-2, 2).

Karena $a = 4$, $b = 3$ maka $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

Persamaan direktriks $y = -2 \pm \frac{7}{4}$ atau $y = -2 \pm 1\frac{3}{4}$.

Eksentrisitas, $e = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{7}$.

Panjang latus rectum adalah $\frac{2 \times 9}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$.

2. Diketahui persamaan $16x^2 + 9y^2 + 64x - 36y - 44 = 0$.

Perlihatkan puncak, focus dan direktris elips tersebut dan gambarkan!

Penyelesaian :

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 36y - 44 = 0$$

$$(16x^2 + 64x) + (9y^2 - 36y) - 44 = 0$$

$$16(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 4y) - 44 = 0$$

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 2)^2 = 144$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

$$\text{Jadi, } a = 3; \quad b = 4; \quad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$c = \sqrt{7}$$

a. Titik Pusat : $(-2, 2)$

b. Titik Fokus : $(-2, 2 \pm c)$

$$f_1 = (-2, 2 + \sqrt{7})$$

$$f_2 = (-2, 2 - \sqrt{7})$$

c. Titik Puncak :

$$(-2, 2 \pm b) : w_1 = (-2, 6)$$

$$w_2 = (-2, -2)$$

$$(-2 \pm a, 2) : v_1 = (-5, 2)$$

$$v_2 = (-5, 2)$$

d. Panjang sumbu mayor = 8

Panjang sumbu minor = 6

e. Eksentrik : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

f. Direktris : $d: y = 2 \pm \frac{b^2}{c}$ yaitu $d_1 : y = 2 + \frac{16}{\sqrt{7}}$ dan $d_2 : y = 2 - \frac{16}{\sqrt{7}}$.

g. Latus Rectum : $y = \pm f$ yaitu $y_1 = 2 + \sqrt{7}$ dan $y_2 = 2 - \sqrt{7}$

Titik – titik latus rectum jika : $y_2 = 2 - \sqrt{7}$ maka $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(2-\sqrt{7}-2)^2}{16} = 1$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{7}{16} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} = 1 - \frac{7}{16}$$

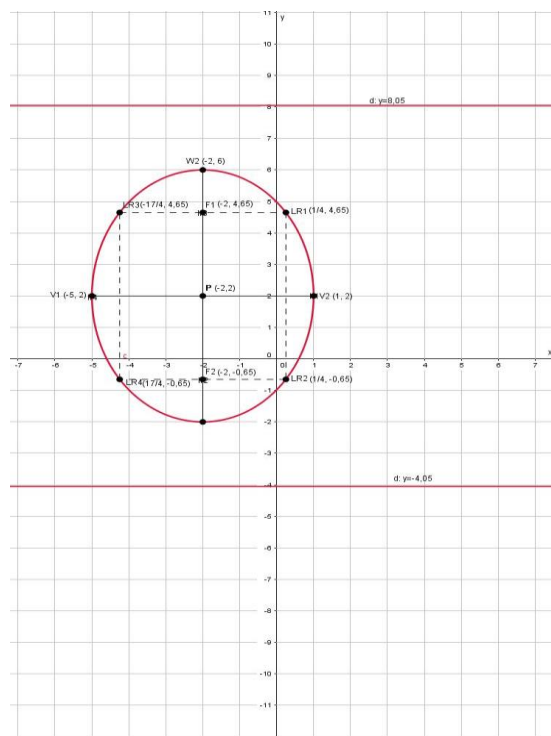
$$(x+2)^2 = 9 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)$$

$$(x+2)^2 = \frac{81}{16}$$

$$(x+2) = \pm \frac{9}{4}$$

Dan untuk $y = 2 + \sqrt{7}$ akan memperoleh nilai x yang sama

Jadi, titik – titik laktus rectum $(\frac{1}{4}, 2 + \sqrt{7})$, $(-\frac{17}{4}, 2 + \sqrt{7})$, $(\frac{1}{4}, 2 - \sqrt{7})$ dan $(-\frac{17}{4}, 2 - \sqrt{7})$



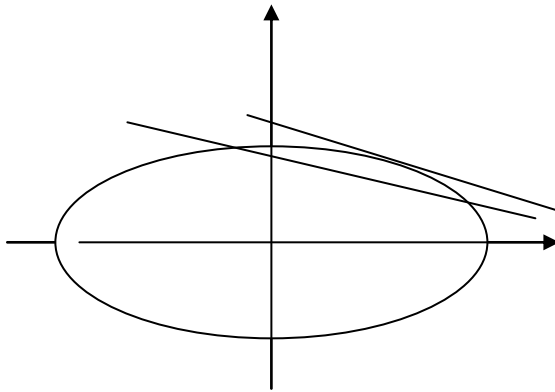
Gambar 6.7. Elips $16x^2 + 9y^2 + 64x - 36y - 44 = 0$.

B. Persamaan Garis Singgung Pada Elips

1. Garis Singgung di Suatu Titik pada Elips

a. Persamaan Garis Singgung di Titik (x_1, y_1) pada Elips dengan Persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Garis l memotong elips di dua titik. Titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$. $A(x_1, y_1)$ pada elips

$$\text{berlaku } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ atau}$$

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \dots\dots\dots 1)$$

Titik $B(x_2, y_2)$ pada elips

$$\text{berarti } \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots 2)$$

Gambar 6.8. Garis Singgung pada Elips

Dari persamaan (2) dikurangi persamaan (1) atau (2) – (1) kita dapatkan :

$$\frac{(x_2^2 - x_1^2)}{a^2} + \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{b^2} = 0$$

$$\frac{(x_2^2 - x_1^2)}{a^2} - \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{b^2} = 0$$

$$b^2 (x_2 + x_1) (x_2 - x_1) = -a^2 (y_2 + y_1) (y_2 - y_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2 (x_2 + x_1)}{a^2 (y_2 + y_1)}$$

$$\text{Gradien pada AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2 (x_2 + x_1)}{a^2 (y_2 + y_1)}$$

Apabila titik A dan titik B berimpit, maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Jika garis l merupakan garis singgung elips dengan gradient m maka

$$\begin{aligned} m &= -\frac{b^2 (x_1 + x_1)}{a^2 (y_1 + y_1)} = -\frac{2b^2 x_1}{2a^2 y_1} \\ &= -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung elips di titik $A(x_1, y_1)$ adalah

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

$$a^2 y_1 (y - y_1) = -b^2 x_1 (x - x_1)$$

$$\begin{aligned}
a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 &= -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2 \\
a^2 y_1 y - b^2 x_1 x &= b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 \quad \text{menurut persamaan (1)} \\
\frac{a^2 y_1 y + b^2 x_1 x}{a^2 \cdot b^2} &= \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot b^2} : a^2 b^2 \\
\frac{y_1 y}{b^2} + \frac{x_1 x}{a^2} &= 1
\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ di titik A (x_1, y_1) adalah :

$$\boxed{\frac{y_1 y}{b^2} + \frac{x_1 x}{a^2} = 1} \quad \text{Atau} \quad \boxed{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1}$$

Untuk elips dengan persamaan $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, maka persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah :

$$\boxed{\frac{y_1 y}{a^2} + \frac{x_1 x}{b^2} = 1}$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis singgung di titik yang berordinat 2 pada elips yang persamaannya $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$!

Penyelesaian:

Substitusi $y = 2$ pada elips diperoleh

$$\frac{x^2}{36} + \frac{2^2}{16} = 1 \quad \text{atau} \quad \frac{x^2}{36} + \frac{4}{16} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} = 1 - \frac{4}{16} \quad \text{atau} \quad \frac{x^2}{36} = \frac{12}{16}$$

$$x = \pm 3\sqrt{3}$$

Jadi, titik singgungnya ($3\sqrt{3}, 2$) dan $(-3\sqrt{3}, 2)$

Persamaan garis singgung melalui titik ($3\sqrt{3}, 2$) adalah :

$$\frac{3\sqrt{3}}{36} x + \frac{2}{16} y = 1 \quad \text{atau} \quad 2\sqrt{3} x + 3y = 24.$$

Persamaan garis singgung melalui titik $(-3\sqrt{3}, 2)$ adalah :

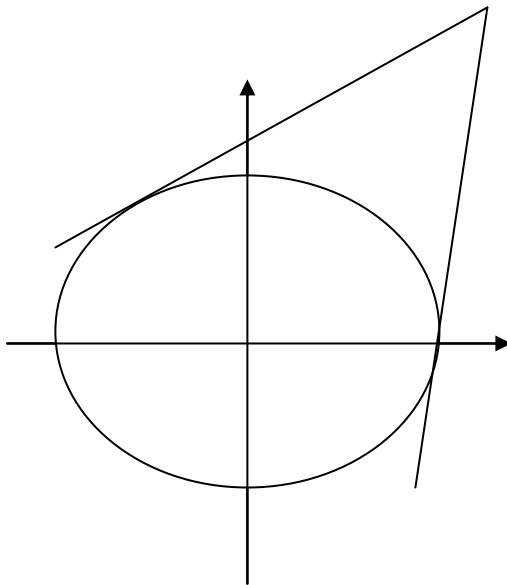
$$-\frac{3\sqrt{3}}{36}x + \frac{2y}{16} = 1 \text{ atau } -2\sqrt{3}x + 3y = 24.$$

b. Garis Singgung pada Elips dari Suatu Titik (x_1, y_1) di luar elips

Untuk menentukan persamaan garis singgung elips dari suatu titik A (x_1, y_1) di luar elips adalah sebagai berikut :

Cara I :

Membuat garis kutub (polar) dengan titik A (x_1, y_1) sebagai kutub terhadap elips, kemudian dicari koordinat titik potong garis kutub tersebut dengan elips, setelah itu kita susun persamaan garis singgung.



Garis kutub l terhadap elips dengan

persamaan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan titik

A (x_1, y_1) sebagai kutub. Garis l memotong elips di titik B (x_2, y_2) dan C (x_3, y_3). Pada titik B dan C kita buat garis singgung AB dan AC yang berpotongan di titik A.

Titik B (x_2, y_2) merupakan titik singgung elips, berarti garis singgung AB mempunyai persamaan

$$\frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1.$$

Gambar 6.9. Garis Khutub

Titik A (x_1, y_1) pada garis singgung AB artinya $\frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1$ (1)

Titik C (x_3, y_3) merupakan titik singgung elips berarti garis singgung AC mempunyai persamaan $\frac{x_3x}{a^2} + \frac{y_3y}{b^2} = 1$.

Titik A (x_1, y_1) pada garis singgung AC artinya $\frac{x_1 x_3}{a^2} + \frac{y_1 y_3}{b^2} = 1$ (2)

Dari persamaan (1) dan (2) dapat kita lihat bahwa titik B dan C terletak pada garis $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ atau garis BC merupakan garis kutub (polar) dengan titik A(x_1, y_1) sumbu kutubnya, yang mempunyai persamaan $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.

Apabila dari titik A (x_1, y_1) yang terletak di luar elips $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ dibuat dua garis singgung terhadap elips tersebut, maka persamaan garis penghubung antara dua garis singgungnya yaitu $\frac{(x-p)(x_1-p)}{a^2} + \frac{(y-q)(y_1-q)}{b^2} = 1$ yang kita sebut sebagai garis kutub (polar) terhadap elips $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ dengan titik A (x_1, y_1) sebagai kutubnya.

Rangkuman

1. Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu adalah tetap. Kedua titik tertentu itu disebut fokus.
2. Bentuk baku persamaan ellips yang berpusat di O (0,0), yaitu :
 - a. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sering disebut **ellips horisontal**, sebab sumbu utamanya berimpit dengan sumbu x.
 - b. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, sering disebut **ellips vertikal**, sebab sumbu utamanya berimpit dengan sumbu y.

Pada setiap persamaan di atas $a^2 > b^2$.

3. Persamaan elips menjadi $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$.

Koordinat puncak menjadi :

$A_1 (a + p, q)$, $A_2 (-a + p, q)$, $B_1 (p, b + q)$ dan $B_2 (p, -b + q)$

Koordinat fokus menjadi $F_1 (c + p, q)$, dan $F_2 (-c + p, q)$

Panjang sumbu mayor = $2a$

Panjang sumbu minor = $2b$

4. Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jarak ke suatu titik dan suatu garis tetap harganya antara 0 dan 1.

Harga tetap itu adalah $\frac{c}{a}$ dengan $0 < \frac{c}{a} < 1$ dinamakan eksentrisitas dan dilambangkan dengan e .

5. Jika kedua garis l dan g disebut garis direktriks maka persamaan kedua garis:

$$l \equiv x = -\frac{a^2}{c} \text{ dan } g \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

Untuk elips dengan pusat (p, q) , $l \equiv x = p - \frac{a^2}{c}$ dan $g \equiv x = p + \frac{a^2}{c}$

Garis l_1 dan l_2 disebut latus rectum dengan persamaan $x = -c$ dan $x = c$.

6. Jadi panjang latus rectum adalah $\frac{2b^2}{a}$ atau $|y_1| + |y_2|$.

7. Jadi, persamaan garis singgung elips $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ di titik A (x_1, y_1) adalah :

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

8. Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada Elips dengan persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ adalah}$$

$$\frac{y_1 y}{a^2} + \frac{x_1 x}{b^2} = 1$$

SOAL-SOAL

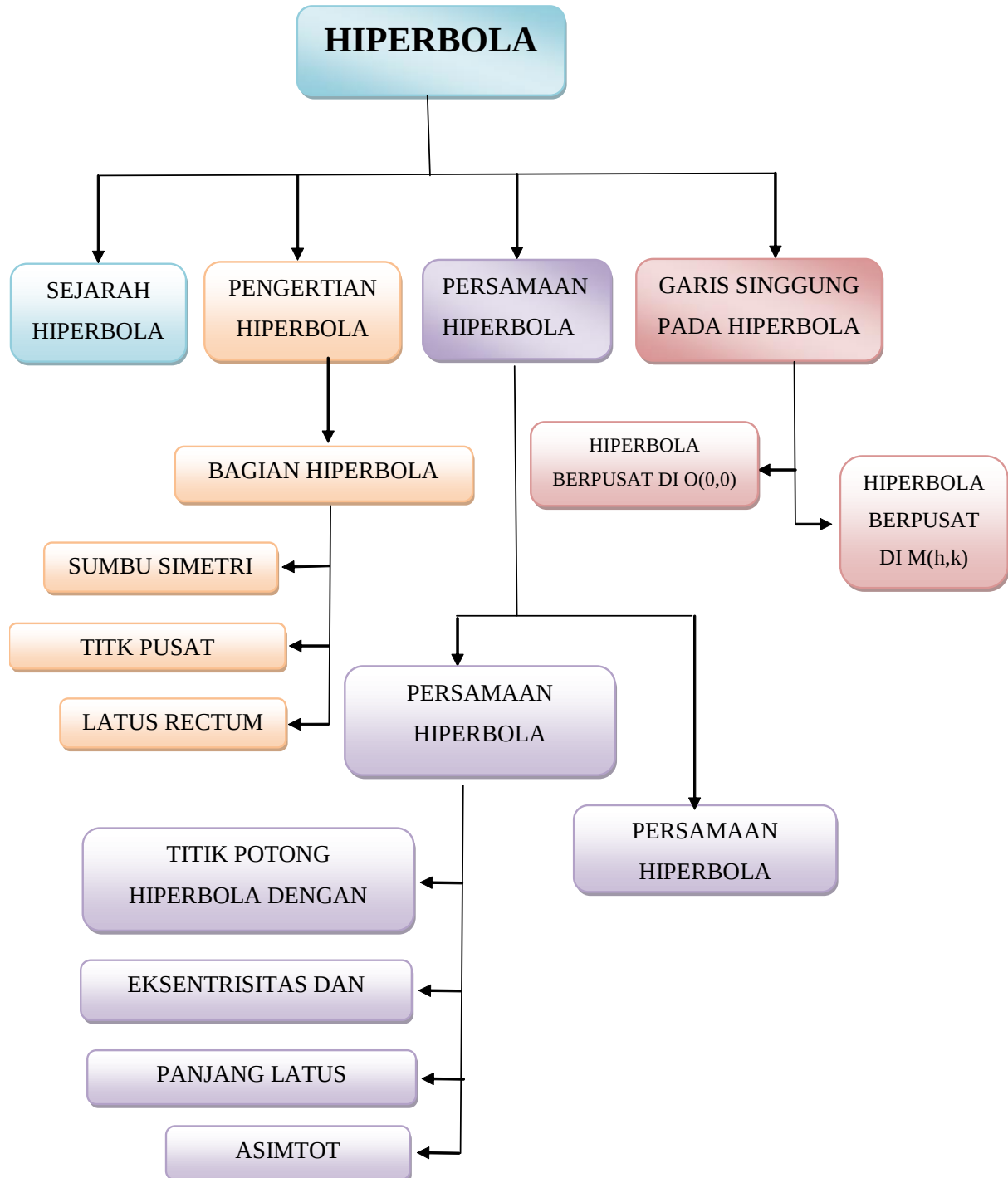
1. Gambarlah grafik elips berikut ini.
 - a. $16x^2 + 25y^2 = 400$,
 - b. $25x^2 + 16y^2 = 400$.
 - c. $x^2 + 3y^2 = 2$.
 - d. $9x^2 + y^2 = 9$.
 - e. $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$,
 - f. $(x + 3)^2 + 4(y - 5)^2 = 16$.
 - g. $3(x + 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 12$

Dimanakah letak puncak, focus dan bagaimana persamaan direktrisnya?

2. Tentukan persamaan ellips berikut dengan syarat yang diberikan berikut ini.
 - a. Sumbu panjang $(\pm 3, 0)$; sumbu pendek $(0, \pm 2)$.
 - b. Panjang sumbu panjang 26; fokus $(\pm 5, 0)$
 - c. Fokus $(\pm 3, 0)$; $a = 4$.
 - d. $b = 3$; $c = 4$; titik pusat pada $(0, 0)$; fokus terletak pada sumbu-sumbu koordinat.
 - e. Fokus $(-1, 0)$ dan $(7, 0)$ dan melalui titik $(0, \frac{12}{5})$.
3. Tentukan persamaan kedua garis singgung pada elips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ di suatu titik pada elips yang berordinat $y = 2$.
4. Bagaimanakah bentuk persamaan garis singgung dititik (x_1, y_1) pada elips $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$?
5. Tentukan persamaan garis singgung elips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ yang sejajar dengan garis $3x + y + 1 = 0$.
6. Selidiki apakah garis berikut memotong elips $x^2 + 4y^2 = 15$
 - a. $x - 2\sqrt{3}y - 8 = 0$
 - b. $x + y = 1$
 - c. $x + y = 9$
7. Tentukan titik-titik potong kedua kurva $y^2 = 2x$ dan $x^2 + 2y^2 = 12$.

8. Jika sumbu panjang suatu elips berimpit dengan sumbu-x dan kedua sumbunya berturut-turut 10 dan 6, sedangkan elips itu menyinggung sumbu-y, tentukan persamaannya?
9. Tentukan nilai k sedemikian sehingga garis $x + 2y = k$ menyinggung elips $x^2 + 4y^2 = 8$. Tentukan juga titik-titik singgungnya.
10. Bagaimana cara menentukan persamaan garis singgung pada elips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ yang dapat ditarik dari titik (5, -4).
11. Buktikan, bahwa ketiga garis polar titik-titik $(2, 2\frac{1}{2})$, $(-4, 10)$ dan $(8, -5)$ terhadap elips $5x^2 + 4y^2 = 20$ melalui sebuah titik tertentu. Titik manakah itu?
12. Tentukan titik polar garis $2x - 3y = 12$ terhadap elips $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$.

BAB VII HIPERBOLA



Gambar 7.1 Peta Konsep Hiperbola



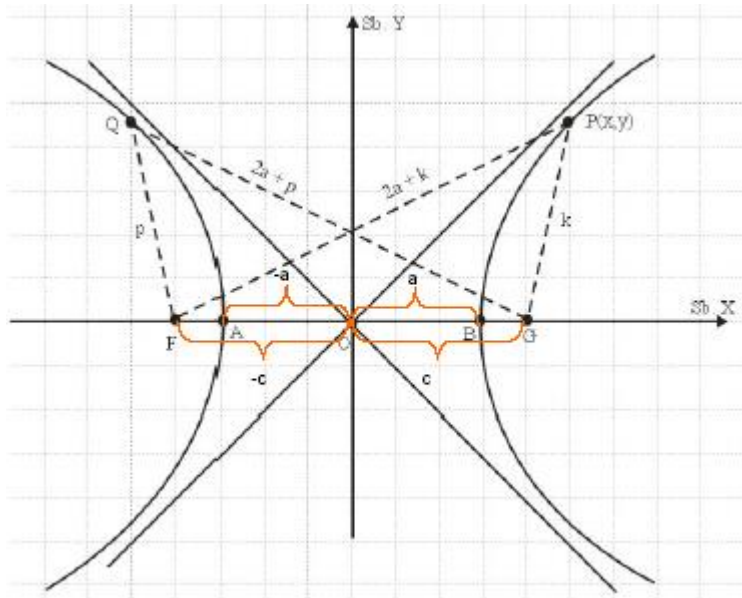
Appollonius yang menjadi matematikawan lahir di Perga, Pamphylia yang sekarang dikenal dengan sebutan Murtina atau Murtana, terletak di Antalya, Turki.

Appolonius (barangkali melanjutkan penamaan Archimedes) mengenalkan kata elips dan hiperbola dalam kaitannya dengan kurva-kurva tersebut. Istilah “elips”, “parabola” dan “hiperbola” diadaptasi kata dan artinya dari para pengikut Pythagoras (pythagorean). Elips berarti kurang atau tidak sempurna digunakan untuk memberi nama apabila luas persegi panjang pada bidang yang diketahui disetarakan dengan bagian garis tertentu yang diketahui hasilnya kurang. Hiperbola yang artinya kelebihan dipakai apabila luas persegi panjang pada bidang yang diketahui disetarakan dengan bagian garis tertentu yang diketahui hasilnya lebih. Parabola yang artinya di samping atau pendamping tidak mengindikasikan lebih atau kurang. Apollonius menggunakan ketiga istilah diatas dalam konteks baru yaitu sebagai persamaan parabola dengan verteks pada asal (0,0), sistem kartesian, adalah $y^2 = lx$ (l = “Latus rectum” atau Parammeter) sekarang diganti dengan $2p$ atau bahkan $4p$.

Geometer yunani membagi kurva menjadi 3 kategori. Pertama “Plane loci” terdiri dari garis lurus dan lingkarang, kedua, “Solid loci” terdiri dari bagian atau potongan kerucut : ketiga, “Liniear loci” gabungan antara garis dan bentuk bidang. Konsep parabola, hiperbola dan elips banyak memberi sumbangan bagi astronomi modern.

A. Persamaan Hiperbola

Definisi: Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap harganya. Dua titik tertentu itu disebut fokus hiperbola



Misalkan: F dan G adalah titik fokus hiperbola yang jaraknya $2c$ sedangkan selisih jaraknya terhadap fokus adalah $2a$ dimana $2c > 2a > 0$

Gambar 7.2. Hiperbola dengan Pusat di $(0, 0)$

Titik O , yaitu titik tengah FG , disebut pusat hiperbola

- Titik $F(-c,0)$ dan $G(c,0)$ disebut titik fokus hiperbola
- Titik $A(-a,0)$ dan $B(a,0)$ disebut titik puncak hiperbola

$$\left. \begin{aligned} \overline{GA} - \overline{FA} &= \overline{FB} - \overline{GB} \\ &= \overline{AG} - \overline{GB} \\ &= \overline{AG} - \overline{GB} \\ &= \overline{AB} = 2a \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \overline{FP} - \overline{GP} &= 2a \\ \overline{GQ} - \overline{FG} &= 2a \end{aligned}$$

- Garis $\overline{AB}$ (sumbu x) dan sumbu y adalah sumbu simetri.

Sumbu x , disebut sumbu nyata

Sumbu y , di sebut sumbu imajiner

- Harga $\frac{c}{a}$ = disebut eksentrisitet hiperbola

Cara Melukis Hiperbola

1. Buatlah lingkaran yang pusatnya di F dan jari-jarinya P di mana $P > c - a$
2. Buatlah lingkaran yang pusatnya di G dan jari-jarinya di $2a + p$
3. Lingkaran (1) dan (2) berpotongan di Q, titik Q adalah salah satu titik pada hiperbola.
4. Buatlah lingkaran yang pusatnya G dan jari-jari K, dimana $K > c - a$
5. Buatlah lingkaran yang berpusat di F dan jari-jarinya $2a + k$
6. Lingkaran (4) dan (5) berpotongan di P, titik P(x,y) adalah salah satu titik pada hiperbola.
7. Dengan mengambil beberapa harga P dan K akan diperoleh beberapa titik lain yang terletak pada hiperbola dengan menghubungkan titik-titik lewat sebuah kurva yang mulus, terdapat hiperbola yang diminta.

1. Persamaan Hiperbola

Jika $F(-c,0)$, $G(c,0)$, dan $P(x, y)$ terletak pada hiperbola maka:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\overline{PG} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{Jadi } \overline{PF} - \overline{PG} = 2a$$

$$2a = \overline{PF} - \overline{PG}$$

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} c^2x^2 - 2ca^2x + a^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\ &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\ &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \end{aligned}$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = -a^2 + a^2c^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \text{ ingat } b^2 = c^2 - a^2 \text{ atau } c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ persamaan hiperbola dengan pusat } 0(0,0)$$

a) Persamaan Hiperbola yang berpusat di (0,0)

1. Untuk hiperbola yang berfokus pada sumbu x, persamaan hiperbolanya adalah :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ atau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dengan :

- Pusat (0,0)
- Titik fokus $F_1(-c,0)$ & $F_2(c,0)$
- Titik puncak (-a,0) & (a,0)
- Panjang sumbu mayor = 2a
- Panjang sumbu minor = 2b
- Persamaan asimtot : $y = \pm \frac{b}{a}x$
- Persamaan direktriks : $x = \pm \frac{a^2}{c}$
- Eksentrisitas: $e = \frac{c}{a}$

- Panjang latus rectum $= \frac{2b^2}{a}$
- $c^2 = a^2 + b^2$

2. Untuk hiperbola yang berfokus pada sumbu y, persamaan hiperbolanya adalah :

$$b^2 y^2 - a^2 x^2 = a^2 b^2 \quad \text{atau} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Dengan :

- Pusat (0,0)
- Titik fokus $F_1(0,-c)$ & $F_2(0,c)$
- Titik puncak (0,-a) & (0,a)
- Panjang sumbu mayor = 2a
- Panjang sumbu minor = 2b
- Persamaan asimtot : $y = \pm \frac{a}{b} x$
- Persamaan direktri : $y = \pm \frac{a^2}{c}$

Contoh 1 :

Diketahui persamaan hiperbola $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$, tentukan :

- Koordinat titik puncak
- Koordinat titik fokus
- Persamaan asimtot
- Persamaan direktri
- Eksentrisitas
- Panjang latus rectum

Jawab :

Dari persamaan hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, diperoleh $a^2=16$, maka $a = 4$ dan $b^2 = 9$, maka $b = 3$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

- koordinat titik puncak : (- a,0)=(- 4,0) & (a,0)=(4,0)

b. koordinat titik fokus : $(-c, 0) = (-5, 0)$ & $(c, 0) = (5, 0)$

c. persamaan asimptot : $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{4}x$

d. persamaan direktriks : $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{4^2}{5} = \pm \frac{16}{5} = \pm 3\frac{1}{5}$

e. eksentrisitas : $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

f. panjang latus rectum = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 3^2}{4} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

Contoh 2 :

Tentukan persamaan hiperbola yang puncaknya $(0, 3)$ & $(0, -3)$ serta fokusnya $(0, 5)$ & $(0, -5)$.

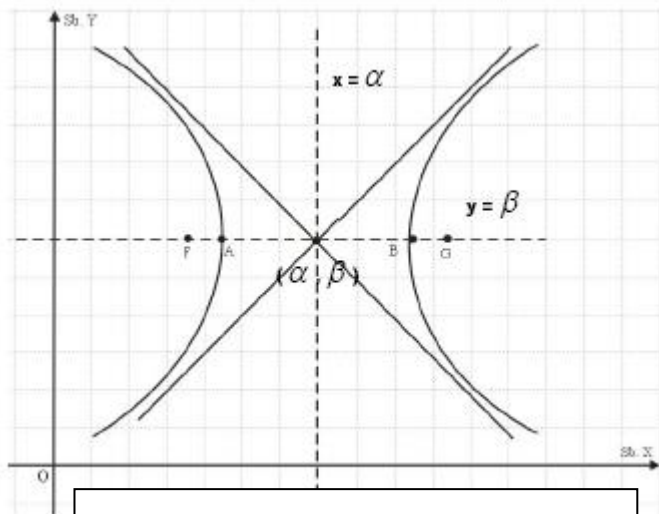
Jawab :

Dari puncak $(0, 3)$ & $(0, -3)$ diperoleh $a = 3$, dari fokus $(0, 5)$ & $(0, -5)$ diperoleh $c = 5$.

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$. Jadi persamaan hiperbolanya adalah

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

b. Persamaan Hiperbola yang berpusat di (α, β)



Gambar 7.3. Hiperbola dengan pusat (α, β)

Jika pusat hiperbola tetap sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat, maka dengan mudah dapat dibuktikan bahwa persamaan hiperbola tersebut adalah:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

1. Untuk hiperbola yang berfokus pada sumbu utama dan sejajar sumbu x, persamaan hiperbolanya adalah :

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

Dengan :

- Pusat (α, β)
- Titik fokus $F_1(\alpha - c, \beta)$ & $F_2(\alpha + c, \beta)$
- Titik puncak ($\alpha - a, \beta$) & ($\alpha + a, \beta$)
- Panjang sumbu mayor = $2a$
- Panjang sumbu minor = $2b$
- Persamaan asimtot : $y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha)$
- Persamaan direktri : $x = \alpha \pm \frac{a^2}{c}$

2. Untuk hiperbola yang berfokus pada sumbu utama dan sejajar sumbu y, persamaan hiperbolanya adalah :

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$

Dengan :

- Pusat (α, β)
- Titik fokus $F_1(\alpha, \beta - c)$ & $F_2(\alpha, \beta + c)$
- Titik puncak ($\alpha, \beta - a$) & ($\alpha, \beta + a$)
- Panjang sumbu mayor = $2a$
- Panjang sumbu minor = $2b$
- Persamaan asimtot : $y - \beta = \pm \frac{a}{b}(x - \alpha)$
- Persamaan direktri : $y = \beta \pm \frac{a^2}{c}$

Contoh :

Diketahui persamaan hiperbola $-4x^2 + 3y^2 - 24x - 18y + 27 = 0$. Tentukan:

- koordinat titik pusat
- koordinat titik puncak
- koordinat titik fokus
- persamaan asimtot

e. persamaan direktriks

Jawab :

Nyatakan terlebih dahulu persamaannya ke dalam bentuk baku

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$-4x^2 + 3y^2 - 24x - 18y + 27 = 0$$

$$-4x^2 - 24x + 3y^2 - 18y = -27$$

$$-4(x^2 + 6x) + 3(y^2 - 6y) = -27$$

$$-4\{(x+3)^2 - 3^2\} + 3\{(y-3)^2 - 3^2\} = -27$$

$$-4\{(x+3)^2 - 9\} + 3\{(y-3)^2 - 9\} = -27$$

$$-4(x+3)^2 + 36 + 3(y-3)^2 - 27 = -27$$

$$-4(x+3)^2 + 3(y-3)^2 = -27 + 27 - 36$$

$$-4(x+3)^2 + 3(y-3)^2 = -36$$

$$4(x+3)^2 - 3(y-3)^2 = 36$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{12} = 1$$

Dari persamaan diatas, diperoleh $\alpha = -3$ dan $\beta = 3$, $a^2 = 9$, maka $a = 3$ dan $b^2 = 12$, maka

$$b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+12} = \sqrt{21}$$

a. Koordinat titik pusat $(\alpha, \beta) = (-3, 3)$

b. Koordinat titik puncak $(\alpha - a, \beta) = (-3-3, 3) = (-6, 3)$ & $(\alpha + a, \beta) = (-3+3, 3) = (0, 3)$

c. Koordinat titik fokus: $F_1(\alpha - c, \beta) = (-3 - \sqrt{21}, 3)$ & $F_2(\alpha + c, \beta) = (-3 + \sqrt{21}, 3)$

d. Persamaan asimptot : $y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha) \Leftrightarrow y - 3 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}(x + 3)$

e. Persamaan direktriks :

$$x = \alpha \pm \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = -3 \pm \frac{9}{\sqrt{21}} \Leftrightarrow x = -3 \pm \frac{3}{\sqrt{21}} \Leftrightarrow x = -3 \pm \frac{3}{7}\sqrt{21}$$

2. Persamaan Parameter Hiperbola

Persamaan parameter parabola tersebut adalah :

$$\begin{cases} x = a \cdot \sec \varphi \\ y = b \cdot \tan \varphi \end{cases}, \text{ ingat } \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$$

3. Asymtot hiperbola

Misalkan persamaan garis asymtot itu $y = px$ (p = parameter) terhadap hiperbola

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\text{Jika } b^2 - a^2 p^2 < 0, p^2 > \frac{b^2}{a^2} \dots\dots\dots (1)$$

Tentulah titik potong imajiner, garis tidak memotong hiperbola.

$$\text{Jika } b^2 - a^2 p^2 > 0, p^2 < \frac{b^2}{a^2} \dots\dots\dots (2)$$

tentulah kedua titik potongnya nyata dan berlainan. Dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$b^2 - a^2 p^2 = 0, p^2 = \frac{b^2}{a^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$p^2 = \pm \frac{b^2}{a^2}$$

Maka garis-garis itu, $y = px$

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \text{ merupakan garis-garis singgung koordinat. Sehingga : } y = \pm \frac{b}{a} x, \text{ disebut}$$

$$\text{asymtot-asymtot hiperbola atau garis singgung pada hiperbola } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

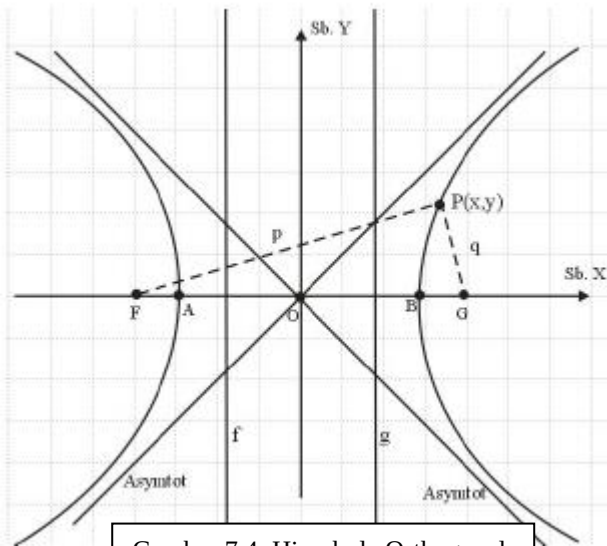
Catatan:

$$\text{Persamaan hiperbola } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ bila } a = b, \text{ maka : } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ atau } x^2 - y^2 = a^2,$$

isebut hiperbola orthogonal, yaitu kedua asymtotnya berpotongan tegak lurus.

Direktriks dan Eksentrisitet

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jarak ke suatu titik dan suatu garis yang tertentu tetap harganya, $e = \frac{c}{a} > 1$.



Gambar 7.4. Hiperbola Orthogonal

- Titik tertentu itu disebut focus
- Garis tertentu itu disebut direktriks
- Harga tetap itu, $e = \frac{c}{a} > 1$ disebut eksentrisitas

$$FP^2 = p^2 = (x + c)^2 + y^2$$

$$GP^2 = q^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$$p^2 - q^2 = 4cx$$

$$(p + q)(p - q) = 4cx$$

$$(p - q)2a = 4cx$$

$$(p - q) = \frac{2cx}{a}$$

$$(p - q) = \frac{2cx}{a}$$

$$(p + q) = 2a$$

$$2p = \frac{2cx}{a} + 2a$$

$$p = \frac{cx}{a} + a$$

$$p = \frac{c}{a} \left(x + \frac{a^2}{c} \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$(p + q) = \frac{2cx}{a}$$

$$(p - q) = 2a \quad -$$

$$2q = \frac{2cx}{a} - 2a$$

$$q = \frac{cx}{a} - a$$

$$q = \frac{c}{a} \left(x - \frac{a^2}{c} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) \text{ dan } (2), p = \left(x + \frac{a^2}{c} \right) = q = \left(x - \frac{a^2}{c} \right) = \frac{c}{a} > 1$$

Jadi garis f dan garis g adalah direktriks dengan persamaan berturut-turut :

$$f \equiv x = -\frac{a^2}{c}$$

$$g \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

B. Kedudukan Garis dan Hiperbola

Seperti halnya pada lingkaran, parabola dan ellips maka kemungkinan kedudukan hiperbola dan garis sebagai berikut.

- Garis tidak memotong hiperbola,
- Garis memotong hiperbola di dua titik, dan
- Garis menyinggung hiperbola.

1. Persamaan Garis Singgung Hiperbola

Misalkan persamaan garis g: $y = sx + k$ dan misalkan persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Titik potong antara garis dan hiperbola di peroleh dari

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(sx+k)^2}{b^2} = 1 \iff (a^2s^2 - b^2)x^2 + 2a^2skx + a^2k^2 - a^2 - b^2 = 0$$

Diperoleh, diskriminan $D = 4a^2b^2(-a^2s^2 + b^2 + k^2)$

Garis menyinggung hiperbola, syaratnya ialah $D = 0$.

Atau $k^2 = a^2s^2 - b^2 \iff k = \pm\sqrt{a^2s^2 - b^2}$.

Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien S terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah

$$y = sx \pm \sqrt{a^2s^2 - b^2}$$

Untuk mencari persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat digunakan cara seperti yang telah dipakai untuk garis singgung suatu elips atau parabola.

Akan diperoleh persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ yaitu

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Persamaan Garis Singgung pada Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Misalkan persamaan garis singgung $y = mx + n$(1)

Persamaan hiperbola $bx^2 - ay^2 = a^2b^2$(2)

(1) dan (2)

$$b^2x^2 - a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 = a^2b^2$$

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$

Syarat menyinggung : $D = 0$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-2a^2mn)^2 - 4(b^2 - a^2m^2) \cdot -(a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$

$$4a^4n^2m^2 + 4(b^2 - a^2m^2) \cdot -(a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$

$$4a^4n^2m^2 + 4a^2b^2n^2 + 4a^2b^4 - 4a^4m^2n^2 - 4a^2b^2m^2 = 0$$

$$\underline{4a^2b^2n^2 + 4a^2b^4 - 4a^2b^2m^2 = 0} : 4a^2b^2$$

$$n^2 + b^2 - a^2m^2 = 0$$

$$n^2 = a^2m^2 - b^2$$

$$n = \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \dots\dots\dots(3)$$

Persamaan (3) ke (1)

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$, ini adalah persamaan garis singgung dengan koefisien arah

m (m parameter) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Analog : untuk persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$,

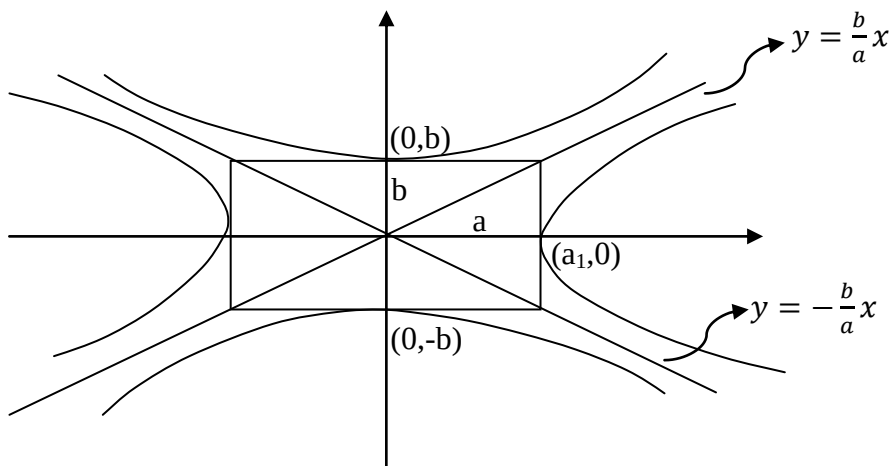
dengan koefisien arah m adalah : $(y - \beta) = m(x - \alpha) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

C. Hiperbola Sekawan dan Sumbu Sekawan

Tinjau persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. Persamaan ini dapat ditulis $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Sebagaimana telah diketahui ini juga adalah persamaan hiperbola dengan sumbu y sebagai sumbu nyata, sumbu x sebagai sumbu imajiner, dan asimtotnya $y = \pm \frac{b}{a} x$, serta sifat-sifat lainnya yang dimiliki oleh hiperbola ini.

Hiperbola ini didapat dengan jalan saling menukar $\frac{x}{a}$ dan $\frac{y}{b}$ dari hiperbola $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan hiperbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ dinamakan dua hiperbola sekawan. Asimtot kedua hiperbola sekawan adalah sama yaitu $y = \pm \frac{b}{a} x$. Oleh karena keempat puncak dari kedua hiperbola ini adalah $(\pm a, 0)$ dan $(0, \pm b)$ maka keempat garis singgung dipuncak-puncak ini membentuk suatu persegi panjang yang sisinya sejajar dengan kedua sumbu koordinat, sedangkan titik sudutnya terletak pada kedua asimtot.

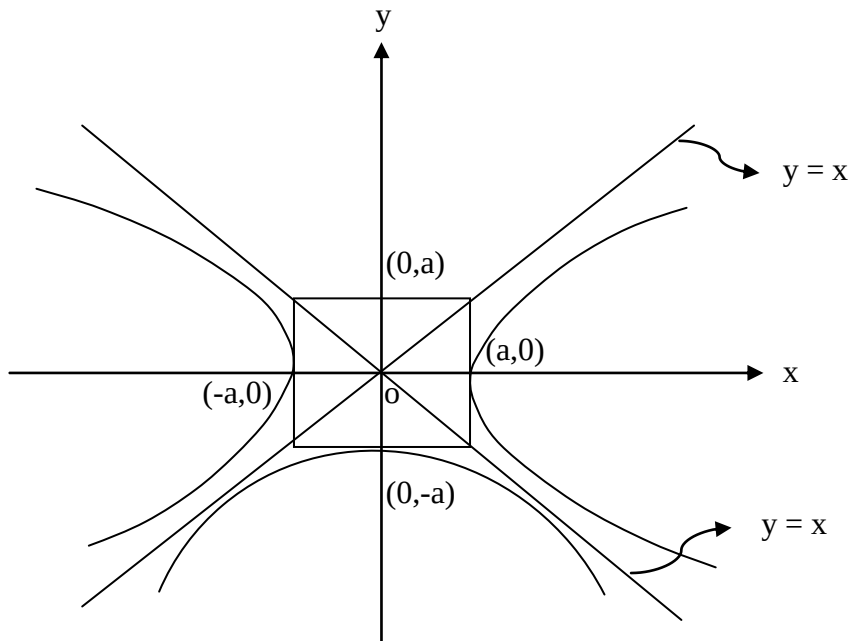
Tinjau persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bila $a = b$ maka persamaan hiperbola menjadi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$. Hiperbola ini disebut hiperbola sama sisi.



Gambar 7.5. Hiperbola Sama Sisi

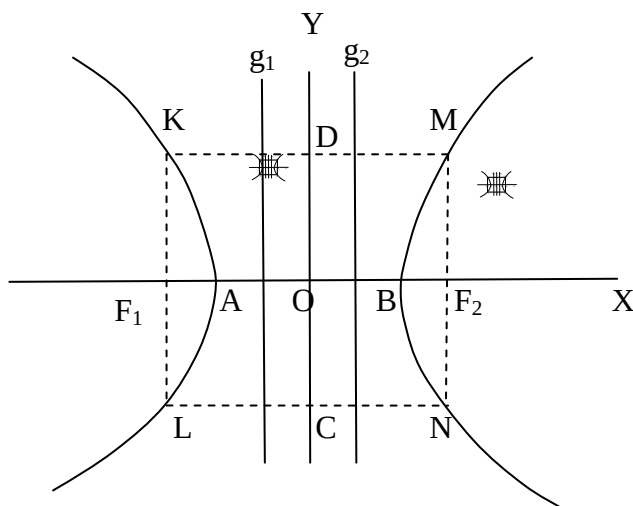
Hiperbola sama sisi ini adalah $x - y = 0$ dan $x + y = 0$. Kedua asimtot ini saling berpotongan tegak lurus. Hiperbola yang mempunyai asimtot saling tegak lurus disebut hiperbola ortogonal. Jadi hiperbola sama sisi adalah juga hiperbola ortogonal. Grafik

hiperbola sekawan samasisi $x^2 - y^2 = a^2$ dan $y^2 - x^2 = a^2$ diperlihatkan dalam gambar berikut ini,



Gambar 7.6. Hiperbola Sekawan Sama Sisi

- I. Jika persamaan Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, berarti:



Gambar 7.7. Hiperbola Sumbu Utama X

1. Pusat O (0,0)
2. Fokus $F_1 (-c, 0)$ dan $F_2 (c, 0)$.
3. Titik Puncak A $(-a, 0)$ dan B $(a, 0)$.
4. $AB = \text{sumbu nyata} = 2a$.

$CD = \text{sumbu imajiner} = 2b$.

5. Sumbu utama adalah sumbu X .

Sumbu sekawan adalah sumbu Y.

6. Persamaan direktris $g_1 : x = \frac{-a^2}{c}$ dan $g_2 : x = \frac{a^2}{c}$
7. Panjang Latus Rectum $= \frac{2b^2}{a} = KL = MN$.
8. Asimtot $y = \frac{b}{a}x$, dan $y = -\frac{b}{a}x$.
9. Hubungan a, b, dan c adalah: $c^2 = a^2 + b^2$
10. Eksentrisitas (e) adalah $e = \frac{c}{a}$ dengan $e > 1$
11. Persamaan garis singgung bergradien m

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

II. Jika persamaan Hiperbola: $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ maka:

1. Pusat di (p,q).
2. Fokus $F_1 (p - c, q)$ dan $F_2 (p + c, q)$.
3. Puncak A $(p - a, q)$ dan B $(p + a, q)$
4. Sumbu utama adalah $y = q$

Sumbu sekawan adalah $x = p$

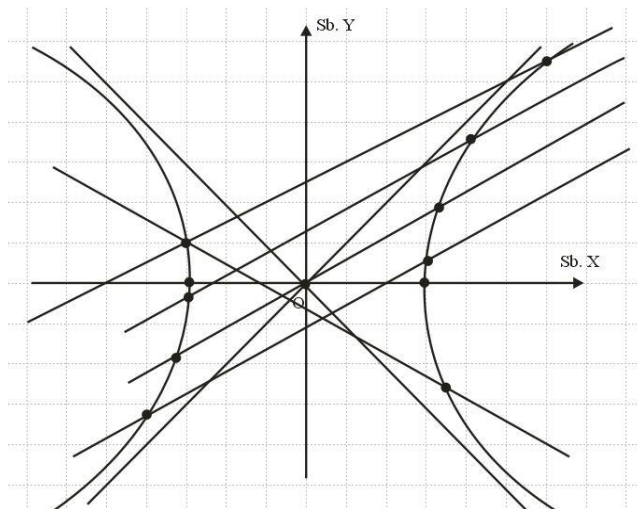
5. Sumbu nyata $AB = 2a$

Sumbu imajiner $CD = 2b$

6. Persamaan direktris $g_1 : x = p - \frac{a^2}{c}$ dan $g_2 : x = p + \frac{a^2}{c}$
7. Panjang Latus rectum $= \frac{2b^2}{a}$.
8. Asimtot $y - q = \frac{b}{a}(x - p)$, dan $y - q = -\frac{b}{a}(x - p)$.
9. $c^2 = a^2 + b^2$
10. Eksentrisitas (e), $e = \frac{c}{a}$ dengan $e > 1$

D. Dua Garis Tengah Sekawan

Dengan merubah b^2 oleh $-b^2$ diperoleh sebagai berikut :



Gambar 7. 8. Hiperbola Dua Garis Tengah Sekawan

1. Setiap garis yang sejajar dengan garis $k \equiv y = mx$ adalah $y = mx + n$
2. Garis k dan l dinamakan dua garis tengah sekawan
3. Hubungan koefisien arah garis k dan l , maka $m_k \cdot m_l = \frac{b^2}{a^2}$
4. Jika titik ujung garis tengah sekawan yang satu (x_1, y_1) dan titik ujung garis tengah sekawan yang lain (x_2, y_2) , maka antara koordinat-koordinat itu terdapat hubungan :

$$\frac{x_2}{a} = \pm \frac{y_2}{b}, \rightarrow x_2 = \pm \frac{a}{b} y_1$$

$$x_2 = -\frac{a}{b}y_1$$

$$y_1 = \frac{b}{a}x_2$$

$$y_1 = -\frac{b}{a}x_2$$

$$\frac{y_2}{b} = \pm \frac{x_1}{a}, \rightarrow x_1 = \frac{a}{b}y_2$$

$$x_1 = -\frac{a}{b}y_2$$

$$y_2 = \frac{b}{a}x_1$$

$$y_2 = -\frac{b}{a}x_1$$

$$P \left(\frac{a}{b}y_2, \frac{b}{a}x_2 \right)$$

$$Q \left(-\frac{a}{b}y_2, -\frac{b}{a}x_2 \right)$$

$$R \left(-\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1 \right)$$

$$S \left(\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1 \right)$$

Persamaan garis tengah sekawan

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$yy_1 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a}xx_1$$

$$y_1 = -\frac{b^2}{a^2m}x_1$$

Rangkuman

1. Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap harganya. Dua titik tertentu itu disebut fokus hiperbola.
2. **Persamaan Hiperbola yang berpusat di (0,0)**

Untuk hiperbola yang berfokus pada sumbu x, persamaan hiperbolanya adalah :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{atau} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dengan :

- Pusat (0,0)
- Titik fokus $F_1(-c,0)$ & $F_2(c,0)$
- Titik puncak (-a,0) & (a,0)
- Panjang sumbu mayor = 2a
- Panjang sumbu minor = 2b
- Persamaan asimtot : $y = \pm \frac{b}{a} x$
- Persamaan direktri : $x = \pm \frac{a^2}{c}$
- Eksentrisitas: $e = \frac{c}{a}$

3. Untuk hiperbola yang berfokus pada sumbu y, persamaan hiperbolanya adalah :

$$b^2 y^2 - a^2 x^2 = a^2 b^2 \quad \text{atau} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Dengan :

- Pusat (0,0)
- Titik fokus $F_1(0,-c)$ & $F_2(0,c)$
- Titik puncak (0,-a) & (0,a)
- Panjang sumbu mayor = 2a
- Panjang sumbu minor = 2b
- Persamaan asimtot : $y = \pm \frac{a}{b} x$
- Persamaan direktri : $y = \pm \frac{a^2}{c}$

4. Persamaan Parameter Hiperbola

Persamaan parameter parabola tersebut adalah :

$$\begin{cases} x = a \cdot \sec \varphi \\ y = b \cdot \tg \varphi \end{cases}, \text{ ingat } \sec^2 \alpha - \tg^2 \alpha = 1$$

5. Asymtot-asymtot pada hiperbola $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ adalah $y = \pm \frac{b^2}{a^2}$.
6. Terkait dengan direktriks dan eksentrisitet maka definisi hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jarak ke suatu titik dan suatu garis yang tertentu tetap harganya, $e = \frac{c}{a} > 1$.
7. Persamaan garis singgung dengan gradien S terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah

$$y = sx \pm \sqrt{a^2 s^2 - b^2}$$

8. Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

SOAL-SOAL:

- Gambarkan grafik hiperbola berikut. Dimanakah letak focus dan direktrix hiperbola itu?
 - $9x^2 - 16y^2 = 144$
 - $16x^2 - 9y^2 = 144$.
 - $8x^2 - y^2 = 8$.
 - $x^2 - y^2 = 1$.
 - $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$.
 - $4y^2 - x^2 + 40y - 4x = -60$.
- Tentukan persamaan hiperbola berikut jika diketahui:
 - Titik-titik puncak $(\pm 2, 0)$; fokus $(\pm 3, 0)$.
 - Titik-titik puncak $(0, \pm 3)$; fokus $(0, \pm 5)$.
 - Melalui titik $(5, 9)$; asimtot $y = \pm x$.
 - Titik-titik puncak $(\pm 2, 0)$; melalui titik $(4, 2)$.
 - asimtot hiperbola $y = 2x + 1$ dan $y = -2x + 3$; melalui titik asal.
- Kedua sumbu suatu hiperbola adalah 12 dan 9. Tentukan persamaan pusat hiperbola itu, serta jarak antara kedua fokusnya.
- Kalau eksentrisitet suatu hiperbola adalah $\frac{13}{12}$, sedangkan jarak antara kedua fokusnya adalah 39, tentukan persamaan pusatnya.

5. Bagaimanakah bentuk persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada hiperbola

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 ?$$

6. Tentukan persamaan kedua garis singgung pada hiperbola yang pertama dalam soal no.3 di suatu titik pada hiperbola yang berkoodinat 3. Dimanakah kedua garis singgung ini berpotongan?

7. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ yang

- a. Sejajar garis $x + y + 1 = 0$
- b. Tegak lurus garis $x - 2y = 0$

8. Selidiki, apakah garis berikut memotong hiperbola $2x^2 - y^2 = 4$:

- a. $x + y = 0$
- b. $2x + y = 0$
- c. $2x + y = 2$

9. Dari suatu hiperbola diketahui jarak antara kedua fokus yaitu 20, sedangkan asimtot nya bersudut 30° dengan sumbu x. tentukan persamaan hiperbola itu?

10. Tentukan hasil perpotongan kedua kurva berikut. Sketsa dan cari titik-titik potongnya.

a. $x^2 - 4y^2 = 36$ dan $x - 2y - 20 = 0$.

b. $y^2 - 8x^2 = 5$ dan $y - 2x^2 = 0$.

11. Suatu garis singgung terhadap hiperbola $4x^2 - y^2 = 36$ memotong sumbu y pada titik $(0, 4)$. Tentukan titik-titik singgung terhadap hiperbola tersebut.

12. Tentuka persamaan hiperbola yang melalui ke-empat titik potong garis $y = \pm 3$ dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ dan yang ber-asimtot $y = 2x$.

13. Tentukan terhadap hiperbola $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

- a. Garis polar nya di titik $A(2, -5)$
- b. Garis singgung di titik $B(4, -2)$
- c. Garis singgung yang berkoefisien arah $\frac{5}{7}$ serta titik singgung nya.

DAFTAR PUSTAKA

Karso, geometri analitik bidang , bandung : epsilon , 1982 .

Louis lithold , the calculus with analytic geometry , new yok , hagerstone , san fransisco : harper international edition ,harper & raw publisher ,1976 .

Morril w.k analytic geometry , pensylvania : international texbook company , scraton ,1967 .

Rawuh , ilmu ukur analitis 2 ,bandung : tarate , 1972/74 .

LAMPIRAN 3

BIAYA DAN JADWAL PENELITIAN

4.1. Anggaran Biaya SEBESAR Rp. 20.000.000

No	Jenis Pengeluaran	Biaya yang Diusulkan	
		Tahun 1	Tahun 2
1	Gaji dan Upah	Rp 1.360.000	
2	Bahan Habis Pakai dan Peralatan	Rp -	
3	Perjalanan	Rp -	
4	Biaya Lainnya	Rp 4.085.000	
Jumlah		Rp 5.445.000	Rp 5.445.000

a. Honorarium

No	Nama	Peran	Alokasi Waktu	Gaji	Jumlah
1	Dra, Ellis Mardiana Panggabean, M.Pd	Ketua	4 jam/minggu x 2 bulan	Rp. 20.000 x 32 jam	Rp 640.000
2	Dra. Mariani Nasution, M.Pd	Anggota	2 jam/minggu x 2 bulan	Rp. 15.000 x 16 jam	Rp 240.000
3	Nur 'Afifah, S.Pd., M.Pd	Anggota	4 jam/minggu x 2 bulan	Rp. 15.000 x 32 jam	Rp 480.000
JUMLAH					Rp 1.360.000

b. Anggaran Bahan Habis Pakai dan Peralatan

No	Nama Bahan	Kegunaan dalam Penelitian	Volume	Biaya Satuan (Rp)	Jumlah (Rp)
1	CD Blank	Pembuatan instrumen, dan laporan penelitian	0	75.000	-
2	Flash Disk 8 Gb	Sda	0	95.000	-
3	Buku-buku tentang geometri analitik	Eksplorasi penelitian	0	215.000	-
4	Buku-buku tentang karakter	Eksplorasi penelitian	0	220.000	-
5	Modem internet-Biaya Pulsa	Untuk penelusuran online	0	480.000	-
6	Kertas HVS	Untuk merancang program penelitian	0	39.000	-
7	Cetak Perangkat Pembelajaran	Untuk membuat bahan ajar	0	50.000	-
8	Tinta Printer	Mencetak instrumen, dan laporan penelitian	0	100.000	-
9	Alat Tulis	Untuk merancang program penelitian	0	35.000	-
10	Map	Dokumentasi data dalam penelitian	0	10.000	-
JUMLAH					-

c. Pengeluaran Lain

No	Nama Bahan	Kegunaan	Volume	Biaya Satuan (Rp)	Jumlah (Rp)
1	Seminar Lokal				
	Penggandaan Laporan Penelitian	Seminar hasil	0	30.000	-
	Konsumsi Peserta	Seminar hasil	0	30.000	-
	Pembuatan Laporan Penelitian	Penyusunan Laporan	0	50.000	-
2	Publikasi Ilmiah (Biaya Jurnal)	Publikasi			3.500.000
3	Dokumentasi	Publikasi			585.000
Jumlah					Rp. 4.085.000

LAMPIRAN 4

**SURAT PERJANJIAN PENUGASAN DALAM RANGKA
PELAKSANAAN PROGRAM PENELITIAN PRODUK TERAPAN DANA APB UMSU (INTERNAL)
TAHUN ANGGARAN 2016
Nomor : 64 /II.3-AU/UMSU-LP2M/C/2017**

Pada hari ini senin tanggal sembilan bulan januari tahun dua ribu tujuh belas, kami yang bertanda tangan dibawah ini :

1. **Dr. Muhammad Said Siregar** : Ketua Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara (UMSU) yang berkedudukan di Medan, berdasarkan Keputusan Rektor UMSU Nomor 850/KEP/II.3-AU/UMSU/D/2016 tanggal 1 April 2016, dalam hal ini bertindak untuk dan atas nama Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara (UMSU) untuk selanjutnya disebut sebagai **PIHAK PERTAMA**;
2. **Dra. Ellis Mardiana Pangabea, M.Pd** : Sebagai Staf Pengajar di Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara yang berkedudukan di Medan, dalam hal ini bertindak sebagai Ketua Pelaksana yang bertanggungjawab dalam Program Penelitian Produk Terapan Dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016 dengan judul: **"Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Yang Baik Pada Pembelajaran Matematika"**; untuk selanjutnya disebut **PIHAK KEDUA**.

Perjanjian penugasan ini berdasarkan kepada :

1. Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003, Tentang Sistem Pendidikan Nasional
2. Anggaran Dasar dan Anggaran Rumah Tangga Muhammadiyah
3. Qaidah Perguruan Tinggi Muhammadiyah
4. Statuta Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
5. SK Rektor UMSU Nomor 850/KEP/II.3-AU/UMSU/D/2016 tanggal 1 April 2016 tentang Pengelola Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat
6. SK Rektor UMSU Nomor 3837/KEP/II.3-AU/UMSU/F/2016 tanggal 15 Desember 2016 tentang Penetapan Proposal Penelitian dan Pengabdian internal Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara Tahun 2016

PIHAK PERTAMA dan **PIHAK KEDUA** secara bersama-sama bersepakat mengikatkan diri dalam suatu perjanjian pelaksanaan Program Penelitian Produk Terapan dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016 dengan ketentuan dan syarat-syarat yang diatur dalam pasal-pasal berikut :

PASAL 1

1. **PIHAK PERTAMA** memberi tugas kepada **PIHAK KEDUA**, dan **PIHAK KEDUA** menerima tugas tersebut untuk melaksanakan dan sebagai penanggung jawab Program Penelitian Produk Terapan Dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016 dengan judul penelitian: **"Mengintegrasikan Nilai-Nilai Karakter Yang Baik Pada Pembelajaran Matematika"**

2. **PIHAK KEDUA** bertanggung jawab penuh atas pelaksanaan, administrasi dan keuangan pekerjaan sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dan berkewajiban menyimpan semua bukti-bukti pengeluaran serta dokumen pelaksanaan lainnya serta menyampaikan laporan hasil penelitian kepada **PIHAK PERTAMA**.
3. Dana Pelaksanaan Penugasan Penelitian Produk Terapan sebagaimana dimaksud pada Ayat (1) sebanyak **1 (Satu) Judul** Dibebankan kepada Anggaran Pendapatan dan Belanja (APB) UMSU sebesar **Rp. 20.000.000,- (Dua Puluh Juta Rupiah)**.

PASAL 2

1. **PIHAK PERTAMA** menyelenggarakan proses administrasi pencairan dana sebagaimana dimaksud Pasal 1 ayat (3).
2. Dana pelaksanaan penugasan sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dibayarkan oleh **PIHAK PERTAMA** kepada **PIHAK KEDUA** secara bertahap melalui Biro Administrasi Keuangan (BAK) UMSU, dengan ketentuan sebagai berikut:
 - a. Pembayaran tahap pertama sebesar 70% dari total bantuan dana kegiatan yaitu 70% X Rp. 20.000.000,- = **Rp 14.000.000,- (empat belas juta rupiah)**
 - b. Pembayaran tahap kedua/terakhir sebesar 30 % dari total bantuan dana kegiatan yaitu 30% X Rp. 20.000.000 = **Rp. 6.000.000,- (enam juta rupiah)**, dibayarkan setelah **PIHAK KEDUA** menyampaikan hard copy (3 rangkap) dan soft copy (CD) dalam format pdf kepada **PIHAK PERTAMA** selambat-lambatnya tanggal **15 April 2017** dokumen-dokumen sebagai berikut :
 1. Laporan Kemajuan Pelaksanaan Penelitian 70 %
 2. Rekapitulasi laporan Penggunaan Keuangan 70 % yang telah dilaksanakan
 3. Berita Acara Serah Terima Laporan Kemajuan Pelaksanaan
 4. Berita Acara Serah Terima Laporan Penggunaan Dana Keuangan 70 %
 - c. **PIHAK KEDUA** bertanggung jawab mutlak dalam pembelanjaan dana tersebut pada ayat (2) sesuai dengan proposal kegiatan yang telah disetujui dan berkewajiban untuk menyimpan semua bukti-bukti pengeluaran dana sesuai jumlah dana yang diberikan.
 - d. **PIHAK KEDUA** berkewajiban mengembalikan sisa dana yang tidak dibelanjakan ke kas UMSU.

PASAL 3

PIHAK PERTAMA tidak bertanggung jawab atas keterlambatan dan/atau tidak terbayarnya sejumlah dana yang disebabkan karena kesalahan **PIHAK KEDUA** dalam menyampaikan dokumen-dokumen sebagaimana dimaksud dalam pasal 2 ayat (2) point b.

PASAL 4

1. **PIHAK KEDUA** harus menyampaikan surat pernyataan telah menyelesaikan seluruh pekerjaan yang dibuktikan dengan Berita Acara Penyelesaian Pekerjaan (BAPP) kepada **PIHAK PERTAMA** dan menyerahkan hard copy laporan hasil penelitian dan rekapitulasi laporan keuangan 100% dan Draft Artikel Ilmiah sebanyak 5 (lima) rangkap dan soft copy (CD) selambat-lambatnya **17 Juni 2017**
2. Apabila sampai dengan batas waktu masa pelaksanaan pekerjaan ini **PIHAK KEDUA** belum menyerahkan Berita Acara Penyelesaian Pekerjaan (BAPP) hasil pekerjaan seluruhnya kepada **PIHAK PERTAMA**, maka **PIHAK KEDUA** dikenakan sanksi berupa :
 - a. Peringatan tertulis dari Pusat penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat UMSU dan/atau
 - b. Pengurangan dan/atau penghentian dana hibah penugasan pelaksanaan penelitian pada tahun berikutnya.
3. Tidak mengikutsertakan pada kompetisi Penelitian berikutnya.
4. Laporan hasil penelitian Produk Terapan sebagaimana tersebut pada ayat (1) harus memenuhi ketentuan sebagai berikut :
 1. Bentuk/ukuran kertas A4

2. Warna cover (d disesuaikan dengan ketentuan yang ditetapkan)
 - a. Penelitian Produk Terapan (PDP) = Warna Merah Muda (Pink)
 - b. Penelitian Produk Terapan (PF) = Warna Coklat
 - c. Penelitian Produk Terapan (PPT) = Warna Orange
 - d. Iptek Bagi Masyarakat (IbM) = Warna Hijau Tua
 - e. Iptek Bagi Kewirausahaan (IbK) = Warna Hijau Muda
 - f. Iptek Bagi Pengembangan Muhammadiyah (IbPM) = Warna Biru Muda
 - g. Iptek Bagi Desa Mitra (IbDM) = Warna Biru Tua
3. Dibagian bawah cover ditulis :

Dibiayai Oleh :

APB Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
Sesuai Dengan Surat Perjanjian Penugasan Dalam Rangka Pelaksanaan Program
Penelitian Produk Terapan Dana APB UMSU Tahun Anggaran 2016
Nomor : 64 /II.3-AU/UMSU-LP2M/C/2017

PASAL 5

Perubahan-perubahan terhadap susunan tim pelaksana dan substansi pelaksanaan penelitian dapat dibenarkan apabila telah mendapat persetujuan tertulis dari **PIHAK PERTAMA**

PASAL 6

1. **PIHAK KEDUA** berkewajiban untuk menindak lanjuti dan mengupayakan hasil penelitian yang dilakukan dosen untuk memperoleh HKI dan/atau publikasi ilmiah untuk setiap judul Program Penelitian Produk Terapan sebagaimana dimaksud pasal 1 ayat (1) selambat-lambatnya **31 Agustus 2017**
2. Perolehan sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dimanfaatkan sebesar-besarnya untuk pelaksanaan Tri Dharma Perguruan Tinggi.
3. **PIHAK KEDUA** berkewajiban untuk melaporkan perkembangan perolehan HKI dan/atau publikasi ilmiah seperti yang dimaksud pada ayat (1) secara berkala kepada **PIHAK PERTAMA** pada setiap akhir tahun anggaran berjalan.
4. **PIHAK KEDUA** wajib mengikuti seminar hasil untuk mempublikasikan hasil penelitian atau pengabdian masyarakat internal UMSU selambat-lambatnya **10 Juni 2017**

PASAL 7

1. Apabila **PIHAK KEDUA** berhenti dari jabatan sebelum pelaksanaan perjanjian ini selesai, maka **PIHAK KEDUA** wajib menyerahkan tanggung jawabnya kepada pejabat baru yang menggantikannya
2. Apabila setiap ketua pelaksana sebagaimana dimaksud dalam pasal 1 tidak dapat menyelesaikan pelaksanaan penelitian ini, maka **PIHAK KEDUA** wajib menunjuk pengganti ketua pelaksana yang merupakan salah satu anggota tim setelah mendapat persetujuan tertulis dari LP2M UMSU.
3. Apabila **PIHAK KEDUA** tidak dapat melaksanakan tugas sebagaimana dimaksud dalam pasal 1, maka harus mengembalikan dana yang telah diterima ke kas UMSU serta menyerahkan fotocopy bukti pengembalian ke kas UMSU kepada **PIHAK PERTAMA**
4. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa judul program penelitian sebagaimana dimaksud dalam pasal 1 dijumpai adanya indikasi duplikasi dengan penelitian lain dan/atau ditemukan indikasi ketidak jujur, i'tikad kurang baik yang tidak sesuai dengan kaidah ilmiah, maka kegiatan penelitian tersebut dinyatakan **BATAL** dan **PIHAK KEDUA** wajib melaporkan ke **PIHAK PERTAMA** dan mengembalikan seluruh dana penelitian yang telah diterima ke kas UMSU serta menyerahkan fotocopy bukti pengembalian kepada **PIHAK PERTAMA**

PASAL 8

1. Hak kekayaan Intelektual yang dihasilkan dari pelaksanaan program penelitian tersebut diatur dan dikelola sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku
2. Hasil penelitian berupa peralatan dan/atau alat yang dibeli dari kegiatan ini adalah milik Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara yang dapat dihibahkan kepada institusi/lembaga/masyarakat melalui surat keterangan hibah

PASAL 9

1. Apabila terjadi perselisihan antara pihak **PIHAK PERTAMA** dan **PIHAK KEDUA** dalam pelaksanaan perjanjian ini akan dilakukan penyelesaian secara musyawarah dan mufakat dan apabila tidak tercapai penyelesaian secara musyawarah dan mufakat maka penyelesaian dilakukan melalui proses hukum yang berlaku dengan memilih domisili hukum pengadilan negeri Medan
2. Hal-hal yang belum diatur dalam perjanjian ini akan diatur kemudian oleh kedua belah pihak

PASAL 10

Surat Perjanjian pelaksanaan penugasan program penelitian Produk Terapan ini dibuat rangkap 2 (dua) bermaterai cukup sesuai dengan ketentuan yang berlaku, dan biaya materai dibebankan kepada **PIHAK KEDUA**.

PIHAK PERTAMA



Dr. Muhammad Said Siregar, M.Si

PIHAK KEDUA

Dra. Ellis Mardiana Pangabean, M.Pd



DIKETAHUI,
WAKIL REKTOR I

Dr. Muhammad Arifin Gultom, SH., M.Hum